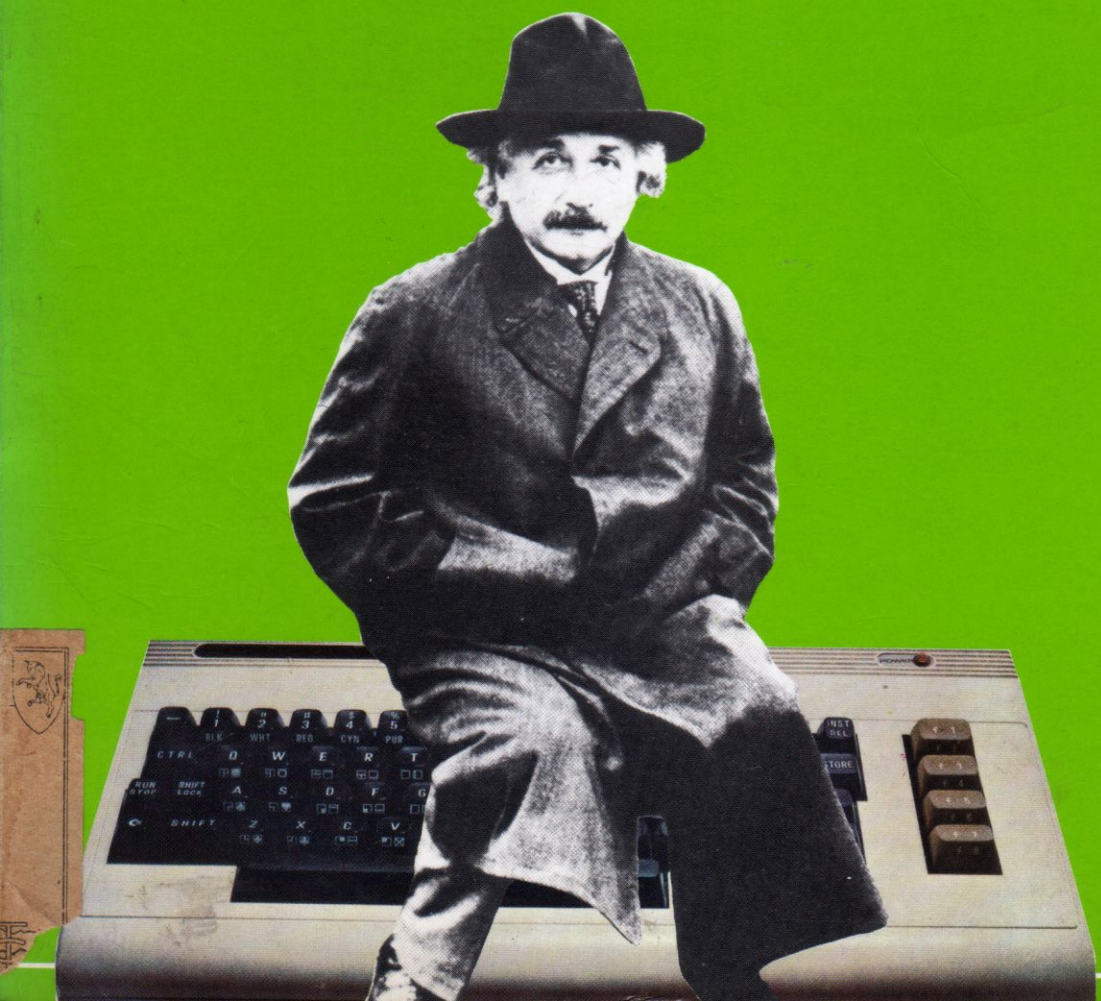
l'informatica a scuola

Sergio Borsani

Matematica e geometria con il Commodore 64™



370.A.90

CIVICA TORINO

Il piacere del computer

Il piacere del computer

1 *Tom Rugg e Phil Feldman* 32 programmi con il PET
2 *Rich Didday* Intervista sul personal computer, hardware
3 *Tom Rugg e Phil Feldman* 32 programmi con l'Apple
4 *Ken Knecht* Microsoft Basic
5 *Paul M. Chirlian* Pascal
6 *Tom Rugg e Phil Feldman* 32 programmi con il TRS-80
7 *Rich Didday* Intervista sul personal computer, software
8 *Herbert D. Peckham* Imparate il Basic con il PET/CBM
9 *Karl Townsend e Merl Miller* Il personal computer come professione
10 *Karen Billings e David Moursund* Te ne intendi di computer?
11 *Thomas Dwyer e Margot Critchfield* Il Basic e il personal computer, uno: introduzione
12 *Don Inman e Kurt Inman* Imparate il linguaggio dell'Apple
13 *Thomas Dwyer e Margot Critchfield* Il Basic e il personal computer, due: applicazioni
14 *Luigi Pierro* Il manuale del CP/M
15 *Carlo Sintini* A scuola con il PET/CBM
16 *David Johnson-Davies* Il manuale dell'Atom
17 *David E. Schultz* Il libro del Commodore VIC 20
18 *Jim Huffman e Robert Bruce* Il "debug" nei personal computer
19 *John M. Nevison* Programmazione in Basic per l'uomo d'affari
20 *Mark Harrison* Imparate il Basic con lo ZX81
21 *Ronald W. Anderson* Dal Basic al Pascal
22 *Herbert D. Peckham* Imparate il Basic con il Texas TI 99/44
23 *Sergio Borsani* A scuola con il Texas TI 99/4A
24 *Jerry Willis e Deborrah Willis* Come usare il Commodore 64
25 *Mark Harrison* Imparate il Basic con lo Spectrum
26 *Carlo Sintini e Costantino Mustacchio* A scuola con il Commodore 64
27 *David A. Lien* Imparate il Basic con l'IBM PC
28 *Ken Tracton* Introduzione al Lisp
29 *Fabio Mavaracchio* Programmi in Basic per l'elettronica
30 *Ian Stewart e Robin Jones* Il linguaggio macchina dello Spectrum
31 *Tom Rugg, Phil Feldman e Clarence S. Wilson* 32 programmi per il VIC 20
32 *Merl Miller e Mary A. Myers* Introduzione all'Apple Macintosh
33 *Stam Krute* Grafica e suoni con il Commodore 64
34 *Jerry Willis e William Manning* Come usare l'IBM PCjr
35 *Tom Rugg e Phil Feldmann* 32 programmi con il Commodore 64
36 *Sergio Borsani* Matematica e geometria con il Commodore 64
37 *David Laine* ZX Spectrum: tecniche avanzate di linguaggio macchina
38 *Salvatore Marseglia* Chimica con il pocket computer

Sergio Borsani

Matematica e Geometria con il Commodore 64

CNUCE

franco muzzio & c. editore

Prima edizione: gennaio 1985
ISBN 88-7021-283-1

© 1985 franco muzzio & c. editore s.p.a.
Via Makallè 73, 35138 Padova, tel. 049/661147-661873
Tutti i diritti sono riservati

Indice generale

6 **Premessa**
8 **Matematica elementare.**
32 **Geometria elementare.**
55 **Rappresentazioni grafiche.**
88 **Ancora matematica.**
130 **Calcolo combinatorio.**

APPENDICI

159 **Simboli usati nella diagrammazione a blocchi.**
161 **Caratteri programmabili.**
163 **Bit map.**
166 **Animazioni.**
168 **Risposte agli esercizi.**

Premessa

La sempre più vasta diffusione degli home computer induce a pensare che siano in molti a possedere una sufficiente conoscenza del Basic e quindi ormai in grado di scrivere i propri programmi. Inoltre è certo che un home computer non è solo un piacevole hobby o uno svago ma è uno strumento scientifico e, con un software adeguato, può consentire un modo nuovo ed eccitante di affrontare quelli che possono essere considerati i classici argomenti di studio.

Non credo si possa mettere in dubbio la funzione positiva dell'elaboratore nel contribuire allo sviluppo di una mentalità scientifica. Con le sue esigenze di algoritmizzazione costituisce una sfida continua alle nostre capacità di organizzare e formulare logicamente i concetti senza ambiguità espressive e fornisce quasi un'immagine tangibile e immediata del nostro pensiero astratto. A buon diritto esso sta trovando un suo spazio anche nel mondo della scuola la quale, nonostante l'inerzia che abitualmente la contraddistingue, non può non tenere in considerazione la realtà, anche tecnologica, del mondo che la circonda e le istanze di una società in rapida evoluzione.

Tuttavia l'uso del computer in campo matematico e scientifico non consente improvvisazioni ed è necessario che il lettore venga gradualmente portato a formarsi una logica di base specifica per tali applicazioni.

Un libro generico non sempre assolve a questo scopo; spesso costringe a lunghi e faticosi adattamenti e per forza di cose non consente di utilizzare in modo armonico tutte le risorse del computer del quale si dispone.

Al contrario i programmi qui raccolti sono stati scritti espressamente

per il Commodore 64 e ne sfruttano, ove necessario, le particolari capacità grafiche non trascurando la possibilità di utilizzare il display in *bit map* per una rappresentazione in alta risoluzione.
I temi sono presentati in ordine di difficoltà crescente essendo i primi generalmente trattati negli studi medi inferiori mentre gli ultimi affrontano argomenti specifici degli studi superiori.
Non sempre questo ordine logico rispecchia le difficoltà insite nelle tecniche di programmazione; il primo programma, per esempio, pur trattando l'argomento elementare della scomposizione in fattori primi, contiene un algoritmo che probabilmente non è di immediata comprensione.
Ogni listato è preceduto da una trattazione generale dell'argomento da un punto di vista matematico, dall'esposizione delle tecniche utilizzate e dalle indicazioni per un corretto uso del programma; segue l'esame dettagliato delle istruzioni Basic. A volte, per meglio illustrare l'algoritmo utilizzato, è stato riportato il diagramma a blocchi. Spesso viene mostrato anche un esempio pratico di utilizzazione del programma e di ciò che appare sul video in risposta a particolari valori; non mancano suggerimenti e proposte operative.
Alcune tecniche di programmazione che non hanno un particolare significato dal punto di vista matematico, ma che sono inerenti alle caratteristiche del Commodore 64, ricorrono in più parti del libro e, per evitare inutili ripetizioni, sono state trattate separatamente nelle Appendici. Nelle note ai listati si faranno solo brevi accenni ad esse, presupponendo che siano già note al lettore.

CAPITOLO UNO

Matematica elementare

I NUMERI PRIMI E LA SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

Com'è noto fin dagli studi secondari inferiori, un numero intero maggiore di uno si dice primo se non ammette divisori diversi da se stesso e da 1. Questo concetto apparentemente banale ha impegnato, in realtà, generazioni di matematici e alcuni problemi ad esso legati sono tuttora irrisolti. Uno di questi va sotto il nome di "ipotesi di Goldbach"; l'affermazione che ogni numero pari, maggiore di 2, sia esprimibile come somma di due numeri primi non è stata né smentita né dimostrata in modo generale. È stata invece contraddetta l'ipotesi di Fermat secondo la quale tutti i numeri generati dalla formula

$$F(n) = 2^{2^n} + 1$$

sono primi. Ad esempio, $2^{2^4} + 1 = 65537$ è primo ma $2^{2^5} + 1$ è uguale al prodotto 641×6700417 e pertanto non è primo.

Ogni numero intero può essere rappresentato come prodotto di numeri primi. Ad esempio, 120 è uguale a $2^3 \times 5$. Questa operazione è denominata "scomposizione in fattori primi" e costituisce l'argomento di questo primo programma.

Teoricamente, per stabilire se un numero è primo basta verificare che non abbia altri divisori all'infuori di se stesso. La verifica, se condotta in modo estensivo, comporta tempi di elaborazione piuttosto lunghi e pertanto si rende necessaria l'applicazione di alcuni concetti volti ad ottimizzare il calcolo.

Primo, ad eccezione del 2 tutti i numeri primi vanno cercati tra i

numeri dispari. Secondo, non è necessario che la ricerca di eventuali divisori si spinga oltre la radice quadrata del numero dato. Infatti, immaginiamo di voler stabilire se 47 è un numero primo; verificato che non è divisibile per 2, per 3 e per 5, è superfluo controllare la divisibilità per 7 perché, essendo il fattore maggiore della radice di 47, quest'ultimo dovrebbe essere scomposto nella forma 7×5 oppure $7 \times 3 \times 2$ ecc., dove compaiono anche fattori che in precedenza avevamo già scartato. Pertanto si deve senz'altro concludere che 47 è un numero primo.

```
10 REM SCOMPOSIZIONE IN FATTORI
20 PRINT"■"
30 PRINTTAB(4)"┌──────────────────────────────────────┐"
40 PRINTTAB(4)"│ ";SPC(29);"│"
45 PRINTTAB(4)"│   SCOMPOSIZIONE IN FATTORI    │"
50 PRINTTAB(4)"│ ";SPC(29);"│"
60 PRINTTAB(4)"└──────────────────────────────────────┘"
70 PRINTTAB(4)"■■■■■■<PREMI UN TASTO PER CONTINUARE>"
80 GETA$:IFA$=""THEN80
220 PRINT"■":P=1
230 INPUT"SCRIVI IL NUMERO. N=";N
240 PRINT"■■";N;"=";
245 IFN/2=INT(N/2)THENP=0
250 T=0:L=0:P=P+2:IFP>SQR(N)THENP=N:N=1:GOTO275
260 IFN/P=INT(N/P)THEN500
270 IFT<>1THEN250
275 PRINTSTR$(P);:IFP=2THENP=1
276 IFL<2THENPRINT" ";:GOTO290
280 PRINT"■■";STR$(L);"■";
290 IFN=1THEN1000
300 PRINT"*";:GOTO250
500 FORJ=2TOP-1:IFP/J=INT(P/J)THEN520:NEXT
510 T=1:L=L+1:N=N/P:GOTO260
520 IFP<>2THEN250
530 GOTO510
1000 PRINT:PRINTTAB(8)"■■■VUOI CONTINUARE? (Y/N)"
1010 GETA$:IFA$=""THEN1010
1020 IFA$="Y"THEN220
1030 IFA$="N"THENPRINT"■":END
1040 GOTO1010
```

Dopo la prima parte per la scrittura del titolo (linee **10-80**) si distinguono nel programma due sezioni principali: la prima (**220-300**) ha lo scopo di cercare i divisori del numero da scomporre, la seconda (**500-530**) verifica che tali divisori siano numeri primi. Inizialmente la variabile **N** rappresenta il numero da scomporre in fattori; in seguito, ogni volta che viene trovato un fattore primo, essa assume il valore uguale alla parte del numero che deve ancora essere scomposta. **P**, invece, assume rispettivamente i valori 2, 3, 5, 7, 9, 11 ecc.; se uno di questi risulta essere divisore di **N** (il confronto si trova alla linea **260**) si passa alla linea **500** per verificare che **P** sia un numero primo.
Poiché tutti i valori di **P**, tranne il 2, sono dispari, le linee di programma **245** e **520** gestiscono l'unico caso particolare. La variabile

numerica L è un contatore che corrisponde all'esponente con il quale compare un fattore primo. Se si trova un numero primo divisore di N, L viene incrementato di una unità e N prende il valore del quoziente N/P (linea 510). Finché la divisione è esatta si continua a dividere per lo stesso numero primo, altrimenti si passa al numero primo successivo. Si procede in questo modo finché non sia N = 1 oppure P maggiore della radice quadrata di N. T è una variabile flag che viene posta uguale a 1 quando il programma passa per la routine 500-530.
Con gli accorgimenti adottati, se i fattori primi non sono molto alti, il tempo di esecuzione si riduce generalmente a pochi secondi.
Ecco un esempio pratico:

```
SCRIVI IL NUMERO.  N=? 142560

          5   4
142560 = 2 * 3 * 5 * 11


   VUOI CONTINUARE? (Y/N)
```

Il tempo di esecuzione è inferiore a un secondo.

Proposte operative

1) La formula di Fermat per n = 5 risulta $2^{2^5} + 1 = 4294967297$. Provate a scomporre in fattori questo numero per verificare che non è un numero primo. Beh ... non siate troppo delusi. Il computer ha trascritto il vostro numero usando la notazione scientifica e subito ha trovato i fattori 2 e 3 che certamente non gli appartengono. Questo sta a indicare che il numero era troppo grande e che sono state introdotte approssimazioni per cui i risultati non sono più attendibili. Questa limitazione, in modo più o meno sensibile, si incontra con qualsiasi computer e come tale va accettata.
Cercate di scoprire i limiti entro i quali i risultati sono attendibili.
2) Il numero 4294967297 è uguale a 641 × 6700417; verificate che questi due numeri sono fattori primi. Quando in risposta si ottiene 641 = 641 significa che il numero è primo.

ESERCIZIO 1-1
Create un programma che scriva tutti i numeri primi inferiori a 100.

ESERCIZIO 1-2
Scrivete un programma che dica quanti numeri primi sono compresi tra 2 e 100, tra 101 e 200, tra 201 e 300 ecc., fino a 1000.

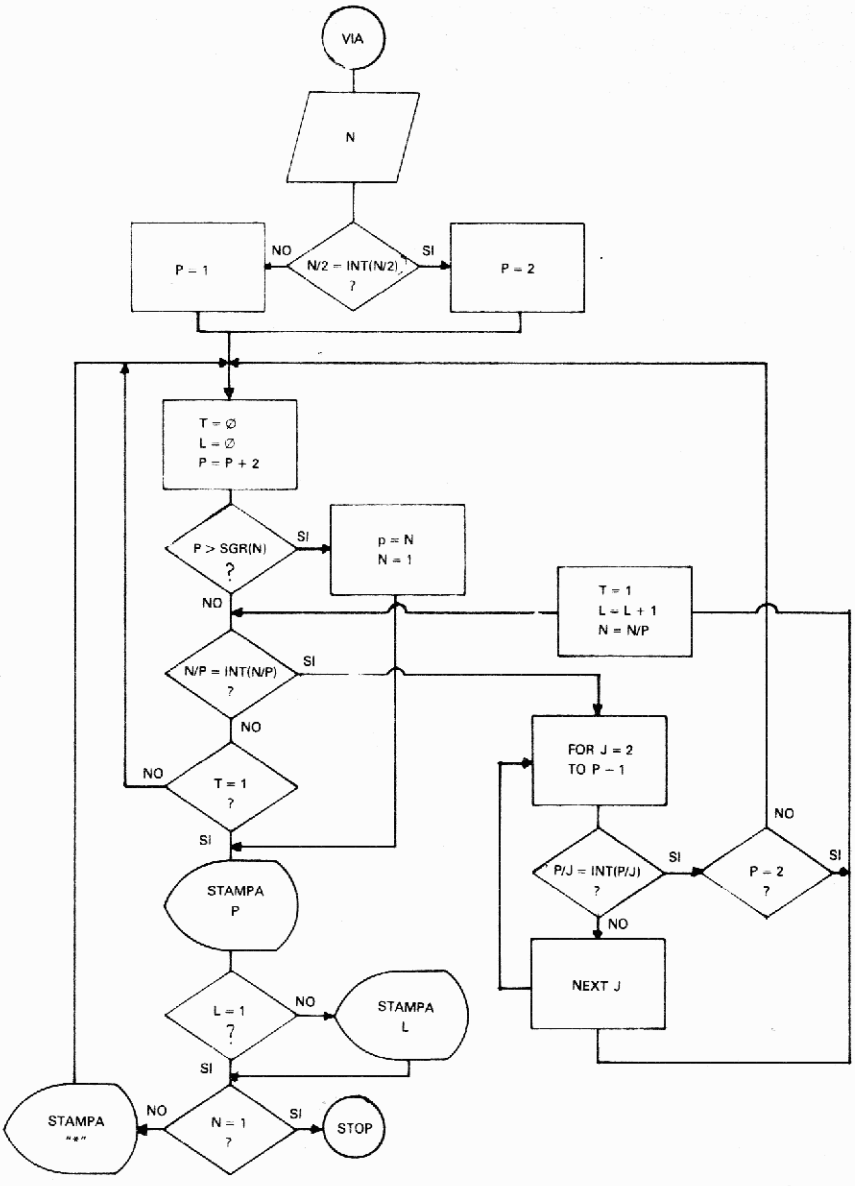


Fig. 1

L'ALGORITMO EUCLIDEO

Supponiamo di eseguire un'ordinaria divisione tra i numeri interi 628 e 24; si ha il quoziente 26 e il resto 4. È soddisfatta la seguente uguaglianza

$$628 = 26 \times 24 + 4$$

Si può dimostrare che i divisori comuni di 628 e 24 sono anche divisori comuni di 24 e 4. Ripetendo il procedimento con questi due numeri si ottiene il quoziente 6 ed il resto 0, pertanto

$$24 = 6 \times 4 + 0$$

Anche in questo caso i divisori comuni di 24 e 4 sono divisori di 4 e 0. Si deduce che 4 è il massimo comune divisore (MCD) di 628 e 24. Ecco il diagramma a blocchi relativo a questo algoritmo.

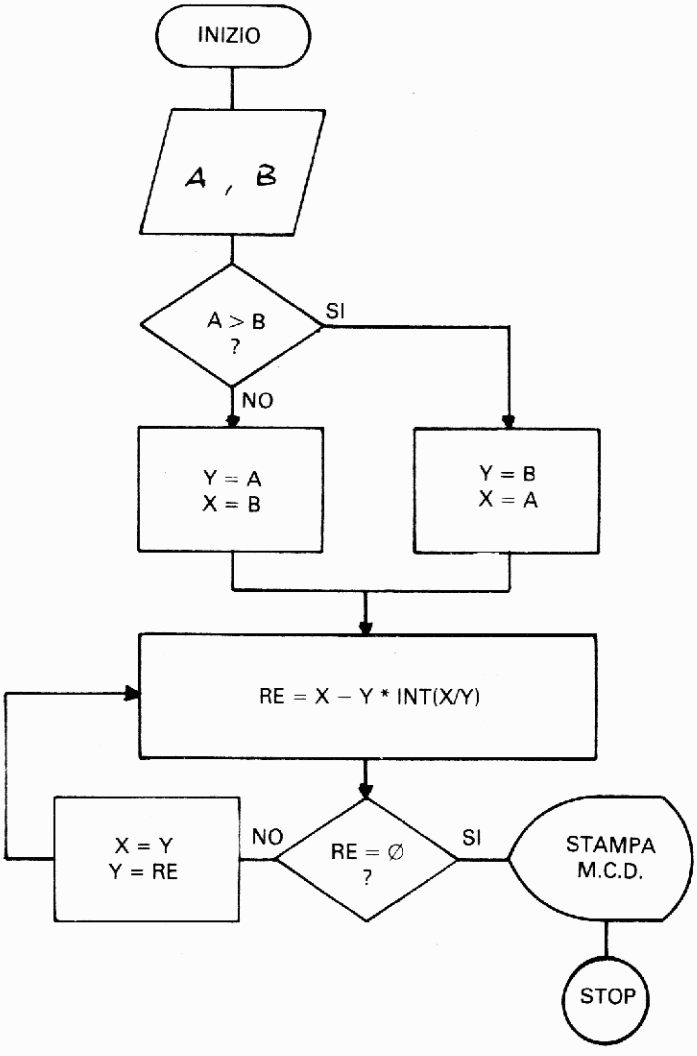


Fig. 2

Segue il programma in Basic che potrà essere utilizzato come routine per trovare il MCD tra due numeri e per ridurre ai minimi termini una frazione.

```
10 PRINT"■■"
15 PRINTTAB(9)"┌──────────────────────┐"
20 PRINTTAB(9)"| ALGORITMO EUCLIDEO |"
25 PRINTTAB(9)"└──────────────────────■■■"
30 FORT=1TO1000:NEXTT
40 PRINT"L'ALGORITMO EUCLIDEO E' UN METODO PER"
50 PRINT"TROVARE IL M.C.D. TRA DUE NUMERI.■"
60 PRINT"SCRIVI,AD ESEMPIO, DUE NUMERI INTERI:■"
70 INPUT"A =";A:INPUT"B =";B:PRINT
75 A=ABS(INT(A)):B=ABS(INT(B))
80 PRINT"SI DIVIDE IL MAGGIORE PER IL MINORE:■"
90 IFA>BTHENX=A:Y=B:GOTO105
100 X=B:Y=A
105 RE=X-Y*INT(X/Y)
110 PRINTX;":";Y;"=";INT(X/Y);"  RESTO =";RE
120 GOSUB500
130 IFRE=0THEN200
140 PRINT"POICHE' IL RESTO E' DIVERSO DA ZERO, SI"
150 PRINT"PROSEGUE DIVIDENDO L'ULTIMO DIVISORE PER";
160 PRINT"IL RESTO■":X=Y:Y=RE:GOTO105
200 PRINT"POICHE' IL RESTO E' UGUALE A ZERO,     "
210 PRINT"L'ULTIMO DIVISORE, CIOE'"STR$(Y)","
215 PRINT"E' IL M.C.D. TRA"A"E"STR$(B)"."
216 PRINTTAB(6)"■M.C.D.("RIGHT$(STR$(A),LEN(STR$(A))-1)",";
218 PRINTRIGHT$(STR$(B),LEN(STR$(B))-1)")="Y
220 PRINT"■■          VUOI CONTINUARE? (Y/N)"
230 GETA$:IFA$=""THEN230
240 IFA$="Y"THENPRINT"■":GOTO70
250 IFA$="N"THENEND
260 GOTO230
500 PRINT"■ *** PREMI UN TASTO PER CONTINUARE ***"
510 GETA$:IFA$=""THEN510
520 PRINT"□";
530 RETURN
```

Dopo il titolo e la presentazione, vengono accettati in input i due numeri dei quali si vuole trovare il MCD (linea 70). La linea 75 garantisce la presenza di soli numeri interi positivi. Le linee 90 e 100 trasferiscono i valori di A e B alle variabili X e Y in modo che risulti sempre X > Y.
RE è il resto della divisione X/Y e il programma ha uno svolgimento ripetitivo fino a che non sia RE = 0; solo allora viene dato il MCD che consiste nell'ultimo valore assunto dalla Y (linee 216-218).

ESERCIZIO 1-3
Scrivete un programma che accetti in input due numeri e, utilizzando l'algoritmo euclideo, fornisca subito il loro MCD.

MASSIMO COMUNE DIVISORE E MINIMO COMUNE MULTIPLO

L'algoritmo euclideo fornisce un metodo rapido e sicuro per trovare il MCD tra due numeri; tuttavia, quando i numeri sono più di due, bisogna seguire una via diversa.
Poiché il MCD di più numeri deve essere minore o al massimo uguale al più piccolo di essi, un metodo consiste nel verificare se questo è divisore di tutti gli altri numeri; se lo è, esso è il MCD, se non lo è, si divide successivamente per 2,3,4 ecc., finché il risultato è un numero intero, dopodiché si verifica nuovamente se questo è divisore di tutti gli altri numeri.
Per il MCM le considerazioni sono analoghe. Infatti il MCM è o il maggiore dei numeri dati o un suo multiplo.
In Basic per conoscere se un numero è multiplo di un altro, si verifica se è soddisfatta la seguente condizione:

M/N = INT(M/N)

dove M e N sono i numeri dati. La funzione INT restituisce la parte intera del quoziente.
Nel programma, oltre alla parte applicativa riguardante la ricerca del MCD e del MCM tra un massimo di dieci numeri, è stata aggiunta una sezione per le esercitazioni. Quest'ultima prevede il calcolo veloce orale del MCD o del MCM tra un massimo di 4 numeri con tre livelli di difficoltà. Il programma fornisce la risposta esatta ed il tempo impiegato.

```
10 REM   MASSIMO COMUN DIVISORE
20 REM             &
30 REM   MINIMO COMUNE MULTIPLO
40 REM   **********************
50 REM
60 PRINT"♥":POKE53280,6
65 PRINTTAB(8)"██████________________________"
70 PRINTTAB(8)"▟ MASSIMO COMUN DIVISORE "
80 PRINTTAB(8)"▟           &            "
90 PRINTTAB(8)"▟ MINIMO COMUNE MULTIPLO ▀"
100 PRINTTAB(8)"| "SPC(22)" |"
110 PRINTTAB(8)"|       1. M.C.D.       |"
120 PRINTTAB(8)"| "SPC(22)" |"
130 PRINTTAB(8)"|       2. M.C.M.       |"
140 PRINTTAB(8)"|_______________________|"
150 PRINTTAB(8)"▟       ■ 3. FINE   ▟       ■"
160 PRINTTAB(8)"________________________"
170 GETA$:IFA$=""THEN170
180 S=ASC(A$)-48:IFS<1ORS>3THEN170
190 ONSGOTO1000,2000,3000
1000 PRINT"♥"
1010 PRINT"VUOI LE APPLICAZIONI O GLI ESERCIZI?"
1020 PRINT"█BATTI <A> PER LE APPLICAZIONI ED <E>"
1030 PRINT"PER GLI ESERCIZI."
1040 GETA$:IFA$=""THEN1040
```

```
1050 IFA$="A"THEN1080
1060 IFA$="E"THEN1300
1070 GOTO1040
1080 F$="D":GOSUB1085:GOTO1099
1085 PRINT"■":PRINT"DI QUANTI NUMERI VUOI TROVARE IL M.C."F$".?"
1090 INPUTN:N=ABS(INT(N)):IFN>10THENPRINT"SPIACENTE, NON PIU' DI 10 ":GOTO1097
1095 IFN<2THENPRINT"SCEGLI ALMENO DUE NUMERI! RIPROVA.":GOTO1097
1096 GOTO1098
1097 FORT=1TO2000:NEXTT:GOTO1085
1098 RETURN
1099 GOSUB1100:GOTO1180
1100 PRINT"■SCRIVI UN NUMERO ALLA VOLTA:■"
1110 IL=0:J=1:PRINT"N1=";:INPUTX(J):GOSUB1900:IFIL=1THEN1110
1120 M=X(1)
1130 FORJ=2TON
1140 IL=0:PRINT"N";RIGHT$(STR$(J),LEN(STR$(J))-1);"=";
1150 INPUTX(J):GOSUB1900:IFIL=1THEN1140
1160 IFM>X(J)THENM=X(J)
1170 NEXTJ:K=0
1175 RETURN
1180 K=K+1:Q=M/K:IFQ<>INT(Q)THEN1180
1190 FORI=1TON:IFX(I)/Q=INT(X(I)/Q)THEN1210
1200 GOTO1180
1210 NEXTI:IFFG=1THEN1470
1220 PRINT"■■   M.C.D.="STR$(Q)"   ■":SZ=1:GOTO2900
1300 GOSUB1700:W1=INT(RND(0)*4)+1:W2=INT(RND(0)*3)+1
1310 X(1)=(INT(RND(0)*10)+1)*W1*W2:M=X(1)
1320 FORI=2TOD+1:X(I)=(INT(RND(0)*10)+1)*W1*W2
1330 IFM>X(I)THENM=X(I)
1340 NEXTI:K=0
1350 PRINT"SCRIVI IL M.C.D. TRA I NUMERI:■"
1360 PRINT"      ";
1370 FORI=1TOD+1:PRINTX(I);:NEXT
1380 PRINT:GOSUB1390:GOTO1460
1390 T1=TI/60:INPUTY:T2=TI/60:TT=T2-T1
1400 MI=INT(TT/60):SE=INT(TT-MI*60)
1410 IFTT<10THENPRINT"■COMPLIMENTI! ";:GOTO1440
1420 IFTT<30THENPRINT"■NON C'E' MALE, ";:GOTO1440
1430 PRINT"■UN PO' LENTO, ";
1440 PRINT"HAI RISPOSTO IN...■"
1450 PRINTMI"MINUTI E"SE"SECONDI■"
1455 RETURN
1460 FG=1:GOTO1180
1470 FG=0:IFY=QTHENPRINT"■■   ...E LA RISPOSTA E' ESATTA!    ■":SZ=2:GOTO2900
1480 PRINT"■■ ...PURTROPPO LA RISPOSTA E' SBAGLIATA. "
1490 PRINT"■■   LA RISPOSTA ESATTA E'"STR$(Q)"   ■":SZ=2:GOTO2900
1700 PRINT"■":PRINT"SCEGLI IL LIVELLO DI DIFFICOLTA'"
1710 INPUT"(1-2-3) ";D:D=ABS(INT(D)):IFD<1ORD>3THEN1700
1720 N=D+1:RETURN
1900 IFX(J)>0ANDX(J)=INT(X(J))THEN1950
1910 PRINT"VALORE NON AMMESSO! RIPROVA"
1920 IL=1:FORT=1TO2000:NEXT
1930 PRINT"□                                □";
1950 RETURN
2000 PRINT"■"
2010 PRINT"VUOI LE APPLICAZIONI O GLI ESERCIZI?"
2020 PRINT"■BATTI <A> PER LE APPLICAZIONI ED <E>"
2030 PRINT"PER GLI ESERCIZI."
2040 GETA$:IFA$=""THEN2040
2050 IFA$="A"THEN2080
2060 IFA$="E"THEN2300
2070 GOTO2040
2080 F$="M":GOSUB1085:GOSUB1100
2090 K=K+1:P=M*K
2100 FORI=1TON:IFP/X(I)=INT(P/X(I))THEN2120
2110 GOTO2090
2120 NEXTI:IFFG=1THEN2400
```

```
2130 PRINT"■■   M.C.M.="STR$(P)"   ■":SZ=3:GOTO2900
2300 GOSUB1700
2310 X(1)=INT(RND(0)*10)+2:M=X(1)
2320 FORI=2TOD+1:X(I)=INT(RND(0)*10)+2
2330 IFM<X(I)THENM=X(I)
2340 NEXTI:K=0
2350 PRINT"SCRIVI IL M.C.M. TRA I NUMERI:■"
2360 PRINT"      ";
2370 FORI=1TOD+1:PRINTX(I);:NEXT
2380 PRINT:GOSUB1390
2390 FG=1:GOTO2090
2400 FG=0:IFY=PTHENPRINT"■■   ...E LA RISPOSTA E' ESATTA!    ■":SZ=4:GOTO2900
2410 PRINT"■■ ...PURTROPPO LA RISPOSTA E' SBAGLIATA. "
2420 PRINT"■■   LA RISPOSTA ESATTA E'"STR$(P)"   ■":SZ=4:GOTO2900
2800 GOTO10
2900 PRINT"■■VUOI CONTINUARE IN QUESTA SEZIONE? (Y/N)"
2910 GETA$:IFA$=""THEN2910
2920 IFA$="Y"THEN2950
2930 IFA$="N"THEN10
2940 GOTO2910
2950 ONSZGOTO1080,1300,2080,2300
3000 PRINT"■":END
```

La linea 60 cambia il colore del bordo mentre le seguenti presentano il menu con le due sezioni principali.
La linea 170 verifica che la scelta sia uno dei numeri 1, 2 o 3. La prima sezione comprende una parte applicativa con inizio alla linea 1080 e gli esercizi con inizio alla linea 1300.
L'introduzione dei dati avviene con due subroutine che verranno utilizzate anche per la ricerca del MCM (1085-1098 e 1100-1175) e che sono state poste in sequenza con questa parte del programma. M è il minimo dei numeri introdotti. Il calcolo viene svolto alle linee 1180-1210; segue la risposta. Alle linee 1300-1340 viene caricata la matrice X(I) con i numeri dei quali si chiede il MCD; essi variano al variare del livello di difficoltà.
La risposta è accettata con la subroutine 1390-1455 con la quale viene anche rilevato il tempo in minuti e secondi. La risposta del computer varia; al di sotto dei 10 secondi è "complimenti"; tra i 10 e i 30 secondi è "non c'è male", altrimenti è "un po' lento".
Alla linea 1490 termina la prima sezione mentre le successive 1700-1720 e 1900-1950 contengono due subroutine rispettivamente per la scelta del livello di difficoltà e per il controllo dei numeri scritti in input per le applicazioni.
Alla linea 2000 inizia la sezione per il calcolo del MCM che comprende le applicazioni (2080-2130) e gli esercizi (2300-2420). Il calcolo del MCM viene effettuato alle linee 2090-2120 e immediatamente dopo viene data la risposta. Le istruzioni 2310-2340 caricano la matrice X(I) con numeri casuali dei quali si chiede il MCM. In questa seconda parte

del programma la variabile M memorizza il massimo dei numeri dati (2330).
Le linee 2400-2420 forniscono la risposta esatta. L'ultima parte (2900-2950) è invece una routine che rimanda, a scelta, alle sezioni di partenza o al menu principale.

FRAZIONI

Il programma svolge le più comuni operazioni con i numeri frazionari, nell'ordine: trasformazione di una frazione in un numero decimale, trasformazione di un numero decimale in frazione, sia esso limitato o illimitato periodico, semplificazione, ricerca di una frazione equivalente a una data, confronto e le quattro operazioni aritmetiche.
L'argomento generalmente viene affrontato al termine del ciclo di istruzione primaria e nel primo anno della scuola media. Pertanto non è necessario esporre le regole del calcolo che sono note a tutti. Anche la programmazione non presenta particolari difficoltà, tuttavia è necessario un certo impegno nel prevedere errori da parte dell'utente che potrebbero provocare un blocco del programma, come un denominatore posto uguale a zero. Alcuni risultati particolari richiedono un output *ad hoc* e talvolta è desiderabile ottenere una forma che generalmente non è ottenibile in Basic. Per esempio, il modo più semplice per scrivere una frazione consiste nell'usare l'istruzione Print A;"/";B con la quale il numeratore, la linea di frazione e il denominatore vengono stampati sulla stessa riga. In questo programma invece, per maggiore chiarezza, le frazioni vengono spesso scritte nel modo convenzionale, anche se ciò comporta un maggior numero di istruzioni. Infatti è necessario indagare se è più lunga la stringa che rappresenta il numeratore o quella che rappresenta il denominatore per creare una linea di frazione di lunghezza adeguata. Inoltre, come è preferibile, le cifre vengono allineate a destra e, mancando nel Basic V2 del Commodore 64 l'istruzione PRINT USING, viene usata la forma PRINT TAB(N-LEN(STR$(A))) dove N è un numero opportuno tale da garantire l'allineamento in corrispondenza di una determinata colonna dello schermo.
Quando è richiesto l'input di più frazioni, il loro numero massimo è stato posto uguale a 10. In tal modo non è necessario il dimensionamento delle variabili con indice. Dieci è un numero più che sufficiente per le normali applicazioni; chi volesse aumentare tale limite deve aggiungere all'inizio del programma l'istruzione DIM NN(X), DD(X), VD(X), FR(X) dove X è il numero massimo di frazioni che possono venir accettate.

```
10 REM        FRAZIONI
20 REM **********************
30 PRINT"□":POKE53280,6
35 PRINTTAB(6)"┌──────────────────────────────────────┐"
40 PRINTTAB(6)"│            FRAZIONI                  │"
50 PRINTTAB(6)"│ "SPC(26)" │"
60 PRINTTAB(6)"│  1. TRASFORMAZIONE DI UNA  │"
70 PRINTTAB(6)"│     FRAZIONE IN DECIMALE.  │"
80 PRINTTAB(6)"│  2. TRASFORMAZIONE DI UN   │"
90 PRINTTAB(6)"│     DECIMALE IN FRAZIONE.  │"
100 PRINTTAB(6)"│  3. SEMPLIFICAZIONE.       │"
110 PRINTTAB(6)"│  4. FRAZIONI EQUIVALENTI.  │"
120 PRINTTAB(6)"│  5. CONFRONTO.             │"
130 PRINTTAB(6)"│  6. ADDIZIONE E SOTTRAZ.   │"
140 PRINTTAB(6)"│  7. MOLTIPLICAZIONE.       │"
150 PRINTTAB(6)"│  8. DIVISIONE.             │"
160 PRINTTAB(6)"│  9. FINE.                  │"
170 PRINTTAB(6)"│ "SPC(26)" │"
180 PRINTTAB(6)"└──────────────────────────────────────┘"
190 GETA$:IFA$=""THEN190
200 AS=ASC(A$)-48:IFAS<1ORAS>9THEN190
210 ONASGOTO300,400,1000,1500,2000,2500,3000,3500,5000
270 REM
280 REM   FRAZIONE IN DECIMALE
290 REM
300 PRINT"□"
310 PRINT"■TRASFORMAZIONE DI UNA FRAZIONE IN NUMERO"
320 PRINT"□■DECIMALE.":GOSUB4500
340 X=A/B:GOSUB4600
350 PRINTTAB(K+1-LEN(STR$(A)))A:PRINT" ";
360 FORJ=1TOK:PRINTCHR$(99);:NEXTJ:PRINT
370 PRINTTAB(K+1-LEN(STR$(B)))B
380 PRINTTAB(K+2)"□□=";X;"■■■":GOTO4700
385 REM
390 REM   DECIMALE IN FRAZIONE
395 REM
400 PRINT"□"
410 PRINT"■TRASFORMAZIONE DI UN NUMERO DECIMALE  "
420 PRINT"■IN FRAZIONE. ■":PRINT
430 PRINT"IL NUMERO DECIMALE E' PERIODICO? (Y/N) ";
440 GETA$:IFA$=""THEN440
450 IFA$="Y"THENPRINT"Y":GOTO800
460 IFA$="N"THENPRINT"N":GOTO480
470 GOTO440
480 PRINT"■SCRIVI IL NUMERO DECIMALE"
490 INPUT"N = ";N:IFN=0THEN590
495 ES=LEN(STR$(N-INT(N)))-2
500 B=10↑ES:A=N*B:GOSUB4600:GOSUB4300
510 PRINT"■■"N"=";
520 TB=(LEN(STR$(N))+3+K):CT=0
530 CT=CT+1:PRINTTAB(TB-LEN(STR$(A)))"□";A;"■"
540 FORJ=1TOK:PRINTTAB(TB-K+J-1)"□"CHR$(99):NEXTJ
550 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(B)))B;:IFCT=2THEN600
560 IFA=NUTHEN600
570 PRINTTAB(TB)"□= ";
580 A=NU:B=DE:GOSUB4600:TB=TB+K+3:GOTO530
590 PRINT"■■      0":PRINT" 0 = ─":PRINT"      1"
600 PRINT"■■■■":GOTO4700
800 PRINT"■SCRIVI IL NUMERO SENZA RIPETERE":PRINT"IL PERIODO ";
805 INPUT"     N =";N:PRINT
810 INPUT"QUANTE CIFRE FORMANO IL PERIODO ";PE
815 IFPE<=LEN(STR$(N-INT(N)))-2THEN820
816 PRINT"* ERRORE!":FORT=1TO2000:NEXT
817 PRINT"□              □□":GOTO810
820 IFN=0THEN590
830 IFPE=0THEN495
840 AP=LEN(STR$(N-INT(N)))-PE-2
```

```
850 ES=AP+PE:A=N*10↑ES-INT(N*10↑AP)
860 B=9:IFPE<2THEN880
870 FORJ=1TOPE-1:B=B*10+B:NEXT
880 B=B*10↑AP:GOSUB4600:GOSUB4300
890 PRINT"■■"N"="
900 PRINT"□□";:FORJ=1TOPE:PRINTTAB(LEN(STR$(N))-PE-1+J)"—":NEXTJ
910 GOTO520
970 REM
980 REM      SEMPLIFICAZIONE
990 REM
1000 PRINT"■"
1010 PRINT"■SEMPLIFICAZIONE DI UNA FRAZIONE          ■■"
1020 GOSUB4500:GOSUB4600:TB=K+5:CT=0
1030 CT=CT+1:PRINTTAB(TB-LEN(STR$(A)))A
1040 FORJ=1TOK:PRINTTAB(TB-K-1+J)"—";:NEXTJ:IFCT=1THENPRINT" =";
1050 PRINT:PRINTTAB(TB-LEN(STR$(B)))B:IFCT=2THENPRINT"■■■":GOTO4700
1060 GOSUB4300:A=NU:B=DE:GOSUB4600:TB=TB+K+3:PRINT"□□□";:GOTO1030
1470 REM
1480 REM     FRAZIONI EQUIVALENTI
1490 REM
1500 PRINT"■■ FRAZIONI EQUIVALENTI                    ■■"
1510 PRINT"SCRIVI I TERMINI DELLA FRAZIONE NOTA:":GOSUB4500:GOSUB4600:Q=A/B
1520 PRINT"□";TAB(K-LEN(STR$(A)))A;"   M"
1530 FORJ=1TOK:PRINT"—";:NEXTJ:PRINT" = —"
1540 PRINTTAB(K-LEN(STR$(B)))B;"   N"
1550 INPUT"■COSA VUOI CONOSCERE, <M> O <N> ";R$
1560 IFR$="M"THEN1590
1570 IFR$="N"THEN1610
1580 PRINT"RISPONDI CON <M> O <N>□□□":GOTO1550
1590 INPUT"SCRIVI IL VALORE DI <N> ";B1
1595 IFB1=0THENPRINT"□";:GOTO1590
1600 A1=B1*Q:GOTO1630
1610 INPUT"SCRIVI IL VALORE DI <M> ";A1
1614 IFA()0ANDA1()0THEN1618
1615 IFA=A1THEN1618
1616 PRINT"■■ IMPOSSIBILE!":FORT=1TO2000:NEXTT:GOTO1500
1618 IFQ=0THENB1=B:GOTO1630
1620 B1=A1/Q
1630 PRINT:TB=K:CT=0
1640 CT=CT+1:PRINTTAB(TB-LEN(STR$(A)))A
1650 FORJ=1TOK:PRINTTAB(TB-K-1+J)"—";:NEXTJ:IFCT=1THENPRINT" =";
1660 PRINT:PRINTTAB(TB-LEN(STR$(B)))B:IFCT=2THENPRINT"■■■":GOTO4700
1670 A=A1:B=B1:GOSUB4600:TB=TB+K+3:PRINT"□□□";:GOTO1640
1970 REM
1980 REM      CONFRONTO TRA FRAZIONI
1990 REM
2000 PRINT"■■ CONFRONTO TRA FRAZIONI                  ■■"
2010 INPUT"QUANTE FRAZIONI DEVI CONFRONTARE ";N
2020 IFN>10THENPRINT"SPIACENTE, NON PIU' DI 10.□□";:GOTO2010
2030 FORJ=1TON:PRINT"■FRAZIONE N.";J:GOSUB4500:NN(J)=A:DD(J)=B:FR(J)=A/B
2040 VD(J)=FR(J):NEXTJ:SW=0
2050 FORJ=1TON-1:IFVD(J)<=VD(J+1)THEN2070
2060 FF=VD(J):VD(J)=VD(J+1):VD(J+1)=FF:SW=1
2070 NEXTJ:IFSW=1THENSW=0:GOTO2050
2080 PRINT"■LE FRAZIONI IN ORDINE CRESCENTE SONO:■":TB=0
2090 FORI=1TON:FORJ=1TON:IFVD(I)=FR(J)THEN2110
2100 NEXTJ
2110 A=NN(J):B=DD(J):GOSUB4600:TB=TB+K
2115 IFTB>38THENTB=K:PRINT"■■■■"
2120 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(A)))A
2130 FORV=1TOK:PRINTTAB(TB-K-1+V)"—";:NEXTV:PRINT
2140 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(B)))B
2150 IFI=NTHENPRINT"■■":GOTO4700
2160 PRINTTAB(TB)"□□ < □";:TB=TB+3:NEXTI
2470 REM
2480 REM    ADDIZIONE E SOTTRAZIONE
2490 REM
```

```
2500 PRINT"■ ADDIZIONE E SOTTRAZIONE                    ■"
2510 INPUT"QUANTE SONO LE FRAZIONI DA SOMMARE ";N
2520 IFN>10THENPRINT"SPIACENTE, NON PIU' DI 10□□":GOTO2510
2530 TN=0:TD=1
2540 FORI=1TON:PRINT"■FRAZIONE N.";I:GOSUB4500:PRINT"□";
2545 IFB<0THENA=-A:B=-B
2550 NN(I)=A:DD(I)=B:TD=TD*DD(I):NEXTI
2560 FORI=1TON:C=TD/DD(I):TN=TN+NN(I)*C:NEXTI
2570 TB=1:PRINT"■"
2580 FORI=1TON:A=NN(I):B=DD(I):GOSUB4600
2590 IFA*B<0THENPRINTTAB(TB)" - □□":GOTO2610
2600 IFI>1THENPRINTTAB(TB)" + □□"
2610 TB=TB+K+2:IFTB>37THENTB=K:PRINT"■■■"
2620 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(A)))ABS(A)
2630 FORJ=1TOK-1:PRINTTAB(TB-K+J)"—";:NEXTJ:PRINT
2640 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(B)))ABS(B)
2650 PRINT"□□□":NEXTI
2660 PRINTTAB(TB)" = ":IFTN=0THENPRINTTAB(TB+3)"□0■■■":GOTO4700
2662 A=TN:B=TD:GOSUB4300
2665 A=NU:B=DE:GOSUB4600:TB=TB+K+4
2670 IFTB>39THENTB=K:PRINT"■■■"
2680 IFA*B<0THENPRINTTAB(TB-K-2)"□ - □□":GOTO2700
2690 PRINTTAB(TB-K-2)"□ + □□"
2700 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(A)))ABS(A)
2710 FORJ=1TOK-1:PRINTTAB(TB-K+J)"—";:NEXTJ:PRINT
2720 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(B)))ABS(B)
2730 PRINT"■":GOTO4700
2970 REM
2980 REM     MOLTIPLICAZIONE
2990 REM
3000 PRINT"■ MOLTIPLICAZIONE                            ■"
3010 INPUT"QUANTE FRAZIONI DEVI MOLTIPLICARE ";N
3020 IFN>10THENPRINT"SPIACENTE, NON PIU' DI 10. RIPETI.□";:GOTO3010
3030 TN=1:TD=1:PRINT
3040 FORI=1TON:PRINT"FRAZIONE N.";I:GOSUB4500
3050 NN(I)=A:DD(I)=B:TN=TN*NN(I):TD=TD*DD(I)
3060 NEXTI:TB=-1:PRINT
3070 FORI=1TON:A=NN(I):B=DD(I):GOSUB4600
3080 IFI>1THENPRINTTAB(TB)" * □□"
3090 TB=TB+K+3:IFTB>37THENTB=K:PRINT"■■■"
3100 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(A)))A
3110 FORJ=1TOK:PRINTTAB(TB-K-1+J)"—";:NEXTJ:PRINT
3120 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(B)))B
3130 PRINT"□□□":NEXTI
3140 PRINTTAB(TB)" = ":IFTN=0THENPRINTTAB(TB+3)"□0■■■":GOTO4700
3145 A=TN:B=TD:GOSUB4300:IFDE<0THENNU=-NU:DE=-DE
3150 A=NU:B=DE:GOSUB4600:TB=TB+K+3
3160 IFTB>39THENTB=K:PRINT"■■■"
3170 PRINT"□□□":PRINTTAB(TB-LEN(STR$(A)))A
3180 FORJ=1TOK:PRINTTAB(TB-K-1+J)"—";:NEXTJ:PRINT
3190 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(B)))B
3200 PRINT"■■■":GOTO4700
3470 REM
3480 REM    DIVISIONE
3490 REM
3500 PRINT"■ DIVISIONE                                  ■"
3510 PRINT"IN QUESTA SEZIONE SI ESEGUE LA DIVISIONE"
3520 PRINT"□TRA DUE FRAZIONI■"
3530 FORI=1TO2:PRINT"FRAZIONE N.";I:GOSUB4500:NN(I)=A:DD(I)=B:NEXT
3540 TN=NN(1)*DD(2):TD=NN(2)*DD(1)
3550 IFTD<>0THEN3570
3560 PRINT"NON SI PUO' DIVIDERE PER ZERO■■":GOTO4700
3570 TB=-1:PRINT
3580 FORI=1TO2:A=NN(I):B=DD(I):GOSUB4600
3590 IFI=2THENPRINTTAB(TB)" : □□"
3600 TB=TB+K+3:IFTB>37THENTB=K:PRINT"■■■"
3610 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(A)))A
```

```
3620 FORJ=1TOK:PRINTTAB(TB-K-1+J)"—";:NEXTJ:PRINT
3630 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(B)))B
3640 PRINT"□□□":NEXTI
3650 PRINTTAB(TB)" = ":A=TN:B=TD:GOSUB4300
3660 A=NU:B=DE:GOSUB4600:TB=TB+K+3
3670 IFB<0THENA=-A:B=-B
3680 IFTB>39THENTB=K:PRINT"■■■"
3690 PRINT"□□□":PRINTTAB(TB-LEN(STR$(A)))A
3700 FORJ=1TOK:PRINTTAB(TB-K-1+J)"—";:NEXTJ:PRINT
3710 PRINTTAB(TB-LEN(STR$(B)))B
3720 PRINT"■■":GOTO4700
4290 *ROUT: SEMPLIFICAZIONE
4300 IFABS(A)>ABS(B)THEN4320
4310 Y=ABS(B):X=ABS(A):GOTO4330
4320 Y=ABS(A):X=ABS(B)
4330 Q=Y/X:R=INT(Y-X*INT(Q)):IFR=0THEN4350
4340 Y=X:X=R:GOTO4330
4350 NU=A/X:DE=B/X
4360 RETURN
4490 REM *ROUT:ACCETTA TERMINI FRAZIONE
4500 INPUT"■  NUMERATORE = ";A
4510 INPUT"DENOMINATORE = ";B
4520 IFB<>0THEN4550
4530 PRINT"ERRORE! IL DENOMINATORE NON PUO' ESSERE"
4540 PRINT"UGUALE A ZERO. RIPROVA.":FORT=1TO2000:NEXTT
4545 PRINT"□□□":FORW=1TO70:PRINT" ";:NEXTW:PRINT"□□□□□":GOTO4500
4550 PRINT"■":RETURN
4590 REM *ROUT:LUNGHEZZA SEGNO FRAZIONE
4600 IFLEN(STR$(A))>LEN(STR$(B))THENK=LEN(STR$(A)):GOTO4620
4610 K=LEN(STR$(B))
4620 RETURN
4690 REM *ROUT: PER CONTINUARE
4700 PRINTTAB(9)"■VUOI CONTINUARE? (Y/N)"
4710 GETA$:IFA$=""THEN4710
4720 IFA$="Y"THEN210
4730 IFA$="N"THEN10
4740 GOTO4710
5000 PRINT"■":END
```

La linea 30 pulisce lo schermo e colora il bordo come la finestra centrale. Segue il menù con 8 scelte operative. L'inizio delle varie sezioni si desume dai numeri di linea ai quali si rimanda con l'istruzione ON GOTO della riga 210. Per trasformare una frazione in numero decimale si divide semplicemente il numeratore per il denominatore (340). La frazione viene scritta su tre righe, con il numeratore, la linea di frazione e il denominatore sovrapposti; la subroutine 4600 determina la lunghezza K della linea di frazione ottenuta con il carattere grafico CHR$(99). Per la trasformazione di un numero decimale in frazione si distingue se il numero decimale è limitato o periodico. Nel primo caso si accetta in input N alla linea 490 e nelle due linee successive si calcolano A e B, numeratore e denominatore della frazione corrispondente. Le subroutine 4600 e 4300, richiamate alla linea 500, calcolano rispettivamente la lunghezza della linea di frazione e i termini semplificati della frazione. Le istruzioni 510-600 stampano il risultato con il controllo della variabile CT che permette la scrittura prima della frazione con i termini non ridotti e poi della stessa frazio-

ne ridotta ai minimi termini. La linea 590 stampa il risultato nel caso si chiedesse la frazione corrispondente a zero.

Per i numeri decimali illimitati periodici si segue la nota regola: il numeratore è tutto il numero, senza la virgola, meno la parte non periodica mentre il denominatore è formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti 0, quante sono le cifre dell'antiperiodo. N è il numero periodico (linea 805), PE è il numero di cifre che formano il periodo (linea 810). Ovviamente bisogna controllare che PE non venga posto maggiore del numero di cifre presente nella parte decimale (linea 815). Il calcolo è svolto con le istruzioni 840-880; AP è la lunghezza dell'antiperiodo. Le altre variabili, A, B e le subroutine 4600 e 4300, hanno lo stesso significato visto in precedenza. Per completare la stampa dei risultati si rimanda alla linea 520.

Alle linee 1000-1060 si trova la sezione per semplificare una frazione; il calcolo, svolto nella già citata subroutine 4300, segue l'algoritmo euclideo. L'input dei dati utilizza la subroutine 4500. Lo sforzo maggiore consiste nello scrivere le due frazioni equivalenti una a fianco dell'altra, in modo convenzionale, come nei testi di matematica.

Nella sezione successiva si trova il numeratore di una frazione di dato denominatore o il denominatore di una frazione di dato numeratore, equivalente ad una seconda frazione. Il procedimento è analogo a quello per risolvere una proporzione. Le linee 1614-1618 controllano il programma anche nel caso che uno dei numeratori sia stato posto uguale a zero.

Il confronto tra frazioni consiste nell'ordinamento delle stesse secondo valori crescenti. Un metodo consiste nel ridurle allo stesso denominatore; con il computer è tuttavia più agevole confrontare i corrispondenti valori decimali. I numeratori, i denominatori e i corrispondenti valori decimali vengono caricati in altrettanti vettori (linea 2030). Per l'ordinamento si utilizzano le istruzioni 2050-2070, dopo che gli elementi di FR(J) sono stati trasferiti in VD(J).

Le sezioni seguenti sono dedicate alle quattro operazioni. Per l'addizione e la sottrazione si usa il metodo che adotterebbe qualsiasi studente di scuola media, con la differenza che invece di scegliere come denominatore comune il MCM dei denominatori, in un programma per computer è preferibile calcolare il prodotto dei denominatori per poi semplificare la frazione somma. Le principali variabili utilizzate sono: NN(I) e DD(I), numeratori e denominatori delle frazioni in input; TD, denominatore comune; C, quante volte ogni denominatore è contenuto nel denominatore comune (linea 2560); TN, somma di tutti i numeratori delle frazioni ridotte allo stesso denominatore.

L'ultima parte del programma è occupata da alcune routine. Alle linee 4300-4360 si trova quella usata per la semplificazione la quale, come è già stato detto, segue l'algoritmo di Euclide (vedi il secondo pro-

gramma di questo stesso capitolo); in essa si accettano i termini A e B e si ritornano le variabili NU e DE. La successiva routine (4500-4550) è adibita all'introduzione dei dati; in questa fase si controlla che i denominatori siano diversi da zero. Un'altra subroutine (4600-4620) calcola la lunghezza del segno di frazione che dovrà essere lungo quanto il numeratore o il denominatore a seconda del numero di cifre che compongono l'uno o l'altro.
L'ultima routine (4700-4740) consente, a scelta, di restare nella stessa sezione di lavoro o di tornare al menù principale. Il programma occupa 6,5 Kbyte di memoria.

INTERESSE E SCONTO

Qual era il prezzo di listino se, dopo aver ottenuto uno sconto dell'8 per cento, si è pagata una somma di lire 23000? Quale aliquota percentuale è stata applicata alla somma di lire 85000 per ottenere un importo di lire 97000? Queste e altre domande simili trovano una risposta nelle prime due sezioni del programma dedicate, per l'appunto, allo sconto e all'interesse semplice. Il calcolo generalmente viene affrontato nella seconda classe della scuola media e consiste nel risolvere una proporzione. Ad esempio, considerando il primo problema, possiamo scrivere:

$x : 23000 = 100 : 92$

da cui si ricava

$$x = \frac{23000 \times 100}{92} = 25\,000$$

Vediamo ora un esempio più complesso.
L'interesse derivante da un deposito bancario, se non viene ritirato, viene capitalizzato, cioè sommato al capitale iniziale. Se, ad esempio, il capitale è di lire 1 000 000 e il tasso di interesse è del 14 per cento, dopo un anno l'interesse ammonta a lire 140 000. L'anno successivo il tasso del 14 per cento non è più applicato al milione iniziale ma a lire 1 140 000 che costituiscono quello che viene chiamato montante. Al passare degli anni il capitale aumenta secondo una legge esponenziale. Ecco la formula per calcolare l'interesse composto:

M = C(1 + R/*V*) ↑ (V * T)

M è il montante, C il capitale iniziale, R è il tasso d'interesse, V è il

numero di volte che, in un anno, l'interesse viene composto al capitale, T è il tempo, espresso in anni. Nel programma tale funzione è stata definita alla linea 400. Si ricorda che nel Basic V2 del Commodore 64 il nome della funzione può essere seguito da una variabile posta tra parentesi. Altri tipi di Basic ammettono più variabili tra parentesi.
La sezione è arricchita dalla rappresentazione dei valori, anno per anno, in forma grafica e per tabulazione. Il grafico, un diagramma a strisce, è particolarmente efficace per comprendere il significato di una legge di accrescimento esponenziale. Una particolare routine permette di far variare, pixel per pixel, la lunghezza delle strisce che formano il grafico, le quali altrimenti varierebbero carattere per carattere (un carattere è lungo 8 pixel), rendendo più approssimata la rappresentazione.
Per dare una dimensione reale al tema trattato è stata aggiunta una parte che consente di calcolare capitali, riferiti ad anni diversi, aventi lo stesso potere d'acquisto. Per esempio, la somma di lire 800 000 del 1975, a causa dell'inflazione, equivale a più di 2 700 000 del 1983. I coefficienti necessari per il calcolo sono quelli medi annui desunti dalla rivista *Capital*. Essi coprono l'intervallo di tempo che va dal 1970 al 1983 e sono riferiti al 1982; quello dell'ultima anno è solo presunto.
Le lire riferite a un anno, moltiplicate per il corrispondente coefficiente, danno le lire equivalenti per l'anno 1982. Inoltre si possono comparare due anni qualsiasi, appartenenti al periodo su indicato, tenendo conto della seguente relazione:

$$L_2 = \frac{L_1 \times C_1}{C_2}$$

dove L_1 e L_2 sono le lire nei due anni che si vogliono confrontare, e C_1 e C_2 sono i rispettivi coefficienti.
Per rendere più immediata la comprensione dei risultati, questi sono accompagnati da ideogrammi costituiti da pile di monete in numero proporzionale al capitale da rappresentare.
(*Per la programmazione dei caratteri necessari in simili rappresentazioni grafiche si veda l'appendice B*).

```
5 PRINT"■":POKE52,48:POKE56,48
6 PRINTTAB(10)"[illegible]UN MOMENTO, PREGO."
10 POKE56334,PEEK(56334)AND254:POKE1,PEEK(1)AND251
20 FORI=0TO695:POKEI+12288,PEEK(I+53248):NEXT
30 POKE1,PEEK(1)OR4:POKE56334,PEEK(56334)OR1
40 POKE53272,(PEEK(53272)AND240)+12
50 FORCH=65TO87:FORBY=0TO7
60 READNU:POKE12288+8*CH+BY,NU
```

```
70 NEXTBY:NEXTCH
150 DATA 0,255,255,255,255,255,255,255
160 DATA 0,254,254,254,254,254,254,254
170 DATA 0,252,252,252,252,252,252,252
180 DATA 0,248,248,248,248,248,248,248
190 DATA 0,240,240,240,240,240,240,240
200 DATA 0,224,224,224,224,224,224,224
210 DATA 0,192,192,192,192,192,192,192
220 DATA 0,128,128,128,128,128,128,128
230 DATA 0,0,0,0,3,31,127,255
240 DATA 0,0,1,63,255,255,255,255
250 DATA 0,0,255,255,255,255,255,255
260 DATA 0,0,128,252,255,255,255,255
270 DATA 0,0,0,0,192,248,254,255
280 DATA 127,159,231,254,127,159,231,254
290 DATA 255,255,255,255,255,255,255,255
295 DATA 255,255,255,255,255,255,255,255
300 DATA 255,255,255,252,147,255,255,252
310 DATA 254,249,199,63,254,249,199,63
320 DATA 255,127,31,3,0,0,0,0
330 DATA 255,255,255,255,63,0,0,0
340 DATA 255,255,255,255,255,255,0,0
350 DATA 147,255,255,255,252,0,0,0
360 DATA 255,254,248,192,0,0,0,0
400 DEF FNFU(T)=CA*(1+R/V)↑(V*T)
490 PRINT"■":POKE53280,6
500 PRINT"■■■■      INTERESSE...":RI=10:CO=22:NM=6:GOSUB5000
510 CO=30:NM=2:GOSUB5000:RI=20:CO=6:NM=3:GOSUB5000
520 CO=14:NM=5:GOSUB5000
530 PRINTTAB(22)"■■■■■■■■■■...E SCONTO."
540 PRINT"■■■■■■   *** PREMI UN TASTO PER INIZIARE ***"
550 GETA$:IFA$=""THEN550
560 PRINT"■■■■■■■"
600 PRINTTAB(9)"1. SCONTO"
610 PRINTTAB(9)"2. INTERESSE SEMPLICE"
620 PRINTTAB(9)"3. INTERESSE COMPOSTO"
630 PRINTTAB(9)"4. POTERE D'ACQUISTO"
640 PRINTTAB(9)"   DELLA LIRA"
650 PRINTTAB(9)"5. FINE"
660 FORH=1149TO1178:POKEH,80:POKEH+54272,8:NEXT
670 FORH=1189TO1549STEP40:POKEH,80:POKEH+54272,8:NEXT
680 FORH=1218TO1578STEP40:POKEH,80:POKEH+54272,8:NEXT
690 FORH=1589TO1618:POKEH,80:POKEH+54272,8:NEXT
700 GETA$:IFA$=""THEN700
710 S%=ASC(A$)-48:IFS%<1ORS%>5THEN700
720 ONS%GOTO1000,2000,3000,4000,4990
970 REM
980 REM    SCONTO
990 REM
1000 PRINT"■*** SCONTO ******************************■■■"
1010 RI=10:CO=2:NM=5:GOSUB5000:PRINTTAB(7)"■■■-"
1020 CO=10:NM=1:GOSUB5000:PRINTTAB(15)"□="
1030 CO=18:NM=4:GOSUB5000
1040 PRINTTAB(26)"□□□□1.PREZZO"
1050 PRINTTAB(26)"2.SCONTO":PRINTTAB(26)"3.COSTO"
1060 PRINTTAB(26)"4.TASSO DI":PRINTTAB(28)"SCONTO■■"
1070 INPUT"      COSA VUOI CONOSCERE";N%
1080 IFN%<1ORN%>4THENPRINT"□□":GOTO1070
1090 PRINT:ONN%GOTO1100,1300,1500,1700
1100 INPUT"CONOSCI LO SCONTO (Y/N)";R$
1110 IFR$="Y"THEN1140
1120 IFR$="N"THEN1210
1130 PRINT"□□":GOTO1100
1140 INPUT"SCONTO = L.";SC
1150 INPUT"CONOSCI IL COSTO (Y/N)";R$
1160 IFR$="Y"THEN1190
```

```
1170 IFR$="N"THEN1200
1180 PRINT"□□":GOTO1150
1190 INPUT"COSTO = L.";C:PR=SC+C:GOTO1230
1200 INPUT"TASSO DI SCONTO (%)";R:PR=SC*100/R:GOTO1230
1210 INPUT"COSTO = L.";C
1220 INPUT"TASSO DI SCONTO (%)";R:PR=INT(C*100/(100-R))
1230 PRINT"■IL PREZZO SENZA SCONTO ERA:"
1240 PRINT"■L.";PR:GOTO5500
1300 INPUT"CONOSCI IL PREZZO (Y/N)";R$
1310 IFR$="Y"THEN1360
1320 IFR$="N"THEN1340
1330 PRINT"□□":GOTO1300
1340 INPUT"COSTO = L.";C
1350 INPUT"TASSO DI SCONTO (%)";R:SC=INT(C*R/(100-R)):GOTO1430
1360 INPUT"PREZZO = L.";PR
1370 INPUT"CONOSCI IL COSTO (Y/N)";R$
1380 IFR$="Y"THEN1420
1390 IFR$="N"THEN1410
1400 PRINT"□□":GOTO1370
1410 INPUT"TASSO DI SCONTO (%)";R:SC=INT(PR*R/100):GOTO1430
1420 INPUT"COSTO = L.";C:SC=PR-C
1430 PRINT"■LO SCONTO E': L.";SC:GOTO5500
1500 INPUT"CONOSCI IL PREZZO (Y/N)";R$
1510 IFR$="Y"THEN1560
1520 IFR$="N"THEN1540
1530 PRINT"□□":GOTO1500
1540 INPUT"SCONTO = L.";SC
1550 INPUT"TASSO DI SCONTO (%)";R:C=INT(SC*(100-R)/R):GOTO1630
1560 INPUT"PREZZO = L.";PR
1570 INPUT"CONOSCI LO SCONTO (Y/N)";R$
1580 IFR$="Y"THEN1620
1590 IFR$="N"THEN1610
1600 PRINT"□□":GOTO1570
1610 INPUT"TASSO DI SCONTO (%)";R:C=INT(PR*(100-R)/100):GOTO1630
1620 INPUT"SCONTO = L.";SC:C=PR-SC
1630 PRINT"■IL COSTO E': L.";C:GOTO5500
1700 INPUT"CONOSCI IL PREZZO (Y/N)";R$
1710 IFR$="Y"THEN1760
1720 IFR$="N"THEN1740
1730 PRINT"□□":GOTO1700
1740 INPUT"SCONTO = L.";SC
1750 INPUT"COSTO = L.";C:R=INT(1000*SC/(SC+C))/10:GOTO1830
1760 INPUT"PREZZO = L.";PR
1770 INPUT"CONOSCI LO SCONTO (Y/N)";R$
1780 IFR$="Y"THEN1820
1790 IFR$="N"THEN1810
1800 PRINT"□□":GOTO1770
1810 INPUT"COSTO = L.";C:R=INT(1000*(PR-C)/PR)/10:GOTO1830
1820 INPUT"SCONTO = L.";SC:R=INT(1000*SC/PR)/10
1830 PRINT"■IL TASSO DI SCONTO E':";R;"%":GOTO5500
2000 PRINT"□*** INTERESSE SEMPLICE **********■■"
2010 PRINT"1.CAPITALE":PRINT"2.INTERESSE"
2020 PRINT"3.MONTANTE":PRINT"4.TASSO"
2022 PRINT"  D'INTERESSE"
2025 R1=10:CO=20:NM=3:GOSUB5000
2030 PRINTTAB(25)"□□+":CO=28:NM=2:GOSUB5000
2040 PRINTTAB(33)"□=":CO=36:NM=5:GOSUB5000
2050 INPUT"■■■■COSA VUOI CONOSCERE ";N%
2060 IFN%<1ORN%>4THENPRINT"□□":GOTO2050
2070 PRINT:ONN%GOTO2100,2300,2500,2700
2100 INPUT"CONOSCI L'INTERESSE (Y/N)";R$
2110 IFR$="Y"THEN2170
2120 IFR$="N"THEN2140
2130 PRINT"□□":GOTO2100
2140 INPUT"MONTANTE = L.";MO
2150 INPUT"TASSO D'INTERESSE (%)";R
```

```
2160 CA=INT(MO*100/(100+R)):GOTO2250
2170 INPUT"INTERESSE = L.";IN
2180 INPUT"CONOSCI IL MONTANTE (Y/N)";R$
2190 IFR$="Y"THEN2240
2200 IFR$="N"THEN2220
2210 PRINT"□□":GOTO2180
2220 INPUT"TASSO D'INTERESSE (%)";R
2230 CA=INT(IN*100/R):GOTO2250
2240 INPUT"MONTANTE = L.";MO: CA=MO-IN
2250 PRINT"■IL CAPITALE INIZIALE E':■"
2260 PRINT"L.";CA:GOTO5500
2300 INPUT"CONOSCI IL CAPITALE (Y/N)";R$
2310 IFR$="Y"THEN2370
2320 IFR$="N"THEN2340
2330 PRINT"□□":GOTO2300
2340 INPUT"MONTANTE = L.";MO
2350 INPUT"TASSO D'INTERESSE (%)";R
2360 IN=INT(MO*R/(100*R)):GOTO2450
2370 INPUT"CAPITALE = L.";CA
2380 INPUT"CONOSCI IL MONTANTE (Y/N)";R$
2390 IFR$="Y"THEN2440
2400 IFR$="N"THEN2420
2410 PRINT"□□":GOTO2380
2420 INPUT"TASSO D'INTERESSE (%)";R
2430 IN=INT(CA*R/100):GOTO2450
2440 INPUT"MONTANTE = L.";MO:IN=INT(MO-CA)
2450 PRINT"■L'INTERESSE E':"
2460 PRINT"■L.";IN:GOTO5500
2500 INPUT"CONOSCI IL CAPITALE (Y/N)";R$
2510 IFR$="Y"THEN2570
2520 IFR$="N"THEN2540
2530 PRINT"□□":GOTO2500
2540 INPUT"INTERESSE = L.";IN
2550 INPUT"TASSO D'INTERESSE (%)";R
2560 MO=INT(IN*(100+R)/R):GOTO2650
2570 INPUT"CAPITALE = L.";CA
2580 INPUT"CONOSCI L'INTERESSE (Y/N)";R$
2590 IFR$="Y"THEN2640
2600 IFR$="N"THEN2620
2610 PRINT"□□":GOTO2580
2620 INPUT"TASSO D'INTERESSE (%)";R
2630 MO=INT(CA*(100+R)/100):GOTO2650
2640 INPUT"INTERESSE = L."=IN:MO=CA+IN
2650 PRINT"■IL MONTANTE E':"
2660 PRINT"■L.";MO:GOTO5500
2700 INPUT"CONOSCI IL CAPITALE (Y/N)";R$
2710 IFR$="Y"THEN2770
2720 IFR$="N"THEN2740
2730 PRINT"□□":GOTO2700
2740 INPUT"INTERESSE = L.";IN
2750 INPUT"MONTANTE = L.";MO
2760 R=INT(1000*IN/(MO-IN))/10:GOTO2850
2770 INPUT"CAPITALE = L.";CA
2780 INPUT"CONOSCI L'INTERESSE (Y/N)";R$
2790 IFR$="Y"THEN2840
2800 IFR$="N"THEN2820
2810 PRINT"□□":GOTO2780
2820 INPUT"MONTANTE = L.";MO
2830 R=INT(1000*MO/CA)/10-100:GOTO2850
2840 INPUT"INTERESSE = L.";IN:R=INT(1000*IN/CA)/10
2850 PRINT"■IL TASSO D'INTERESSE E' DEL";R;"%":GOTO5500
3000 PRINT"□*** INTERESSE COMPOSTO**********■■■■■"
3010 PRINT"CAPITALE":PRINTTAB(32)"□MONTANTE"
3020 RI=12:CO=9:NM=1:GOSUB5000
3030 CO=15:NM=2:GOSUB5000:CO=21:NM=4:GOSUB5000:CO=27:NM=8:GOSUB5000
3040 INPUT"■■■■CAPITALE = L.";CA
```

```
3050 INPUT"TASSO D'INTERESSE (%)";R:R=R/100
3060 PRINT"SCRIVI: ANNI,MESI,GIORNI":INPUT"(A,M,G)";T,M,G
3070 T=T+M/12+G/365
3080 PRINT"QUANTE VOLTE ALL'ANNO VIENE COMPOSTO"
3090 INPUT"L'INTERESSE";V:MO=FNFU(T)
3100 PRINT"AL TERMINE DEL PERIODO SU INDICATO IL"
3110 PRINT"CAPITALE E' DIVENTATO:"
3120 PRINT"L.";INT(MO)
3130 PRINT"VUOI LA SITUAZIONE ANNO PER ANNO? (Y/N)"
3135 GETA$:IFA$=""THEN3135
3140 IFA$="Y"THEN3170
3150 IFA$="N"THEN5500
3160 GOTO3135
3170 INPUT"ANNO INIZIALE";IN:IFLEN(STR$(IN))>5THEN3170
3180 PRINT:T1=T:FORT=0TOT1:PRINTSTR$(IN+T);"  L.";INT(FNFU(T))
3182 IFT/20<>INT(T/20)ORT=0THEN3188
3184 PRINT"*** PREMI UN TASTO ***"
3185 IFT/20<>INT(T/20)THEN3188
3186 GETA$:IFA$=""THEN3186
3187 PRINT"□                                □"
3188 NEXTT
3190 IFT1=INT(T1)THEN3300
3200 PRINTSTR$(IN+T);"/ L.";INT(MO)
3300 PRINT"VUOI IL GRAFICO? (Y/N)"
3310 GETA$:IFA$=""THEN3310
3320 IFA$="Y"THEN3350
3330 IFA$="N"THEN5500
3340 GOTO3310
3350 PRINT:U=MO/30
3360 FORT=0TOT1:PRINTIN+T
3370 W=INT(FNFU(T)/U):IFW=0THEN3390
3380 FORXU=1TOW:POKE1950+XU,65:POKE56222+XU,14:NEXTXU
3390 OU=INT((FNFU(T)-W*U)*8/U):IFOU=0THEN3410
3400 POKE1950+XU,73-OU:POKE56222+XU,14
3410 IFT/20<>INT(T/20)ORT=0THEN3450
3420 PRINT"*** PREMI UN TASTO ***"
3430 GETA$:IFA$=""THEN3430
3440 PRINT"□                                □"
3450 NEXTT
3460 IFT1=INT(T1)THEN3500
3470 W=INT(MO/U):PRINTSTR$(IN+T);"/"
3480 FORXU=1TOW:POKE1950+XU,65:POKE56222+XU,14:NEXT
3490 OU=INT((MO-W*U)*8/U):IFOU=0THEN3500
3495 POKE1950+XU,73-OU:POKE56222+XU,14
3500 PRINT"     VUOI RIVEDERE LA TABELLA? (Y/N)"
3510 GETA$:IFA$=""THEN3510
3520 IFA$="Y"THEN3180
3530 IFA$="N"THEN5500
3540 GOTO3510
4000 PRINT"*** POTERE D'ACQUISTO DELLA LIRA *******"
4010 RI=10:CO=8:NM=6:GOSUB5000
4020 PRINT"A CAUSA DELL'INFLAZIONE, IL POTERE D'AC-";
4030 PRINT"QUISTO DELLA LIRA DIMINUISCE OGNI ANNO."
4035 FORT=1TO6000:NEXT
4040 CO=14:NM=4:GOSUB5000:CO=20:NM=2:GOSUB5000:CO=28:NM=1:GOSUB5000
4050 PRINT"CHI NEL 1975 GUADAGNAVA 800 MILA LIRE,"
4060 PRINT"NEL 1983 DOVEVA GUADAGNARE 2 MILIONI E"
4070 PRINT"E 780 MILA LIRE PER AVERE UNO STIPENDIO"
4080 PRINT"EQUIVALENTE."
4090 PRINTTAB(11)"(PREMI UN TASTO)"
4100 GETA$:IFA$=""THEN4100
4110 PRINT"SPECIFICANDO I DUE ANNI DA CONFRONTARE"
4120 PRINT"E IL CAPITALE RELATIVO AD UNO DI ESSI,"
4130 PRINT"IL PROGRAMMA CALCOLA LE LIRE EQUIVALENTI";
4140 PRINT"PER L'ALTRO ANNO."
4150 PRINT"LE DUE SOMME AVRANNO LO STESSO POTERE"
```

```
4160 PRINT"D'ACQUISTO.█"
4170 PRINTTAB(11)"<PREMI UN TASTO>"
4180 GETA$:IFA$=""THEN4180
4190 DATA 5.696,5.4,5.079,4.522,3.747
4200 DATA 3.179,2.699,2.281,2.02,1.758
4210 DATA 1.461,1.228,1,.896
4212 IFDF=1THEN4230
4215 DIM CF(14):DF=1
4220 FORI=1TO14:READCF(I):NEXT
4230 PRINT"□GLI ANNI CONSIDERATI VANNO DAL 1970 "
4240 PRINT"AL 1983.█"
4250 INPUT"ANNO";A1:IFA1<1970ORA1>1983THENPRINT"□□":GOTO4250
4260 INPUT"CAPITALE";C1
4270 PRINT"█CALCOLO DELLE LIRE EQUIVALENTI PER"
4280 INPUT"L'ANNO";A2:IFA2<1970ORA2>1983THENPRINT"□□":GOTO4280
4290 PRINT"█":NM=INT(CF(A2-1969)*2+.5):RI=18:CO=8:GOSUB5000
4300 NM=INT(NM/2):IFNM<>0THENCO=14:GOSUB5000
4310 NM=INT(CF(A1-1969)*2+.5):CO=23:GOSUB5000
4320 NM=INT(NM/2):IFNM<>0THENCO=29:GOSUB5000
4330 PRINT"████████████████"A1;TAB(34)A2"
4340 C2=INT(C1*CF(A1-1969)/CF(A2-1969)):C2=INT(C2/10)*10
4350 PRINT"███L.";C1;"DELL'ANNO";A1
4360 PRINT"EQUIVALGONO A"
4370 PRINT"L.";C2;"DEL";A2
4380 PRINTTAB(8)"██VUOI CONTINUARE? (Y/N)"
4390 GETA$:IFA$=""THEN4390
4400 IFA$="Y"THENPRINT"███":GOTO4230
4410 IFA$="N"THEN560
4420 GOTO4390
4990 PRINT"█":POKE53272,21:POKE53280,14:END
5000 LO=983+RI*40+CO:REM *** MONETE ***
5010 FORP=0TO4:POKELO+P,83+P:POKELO+P+54272,7:NEXT
5030 FORV=1TONM:LO=LO-40
5040 FORP=0TO4:POKELO+P,78+P:POKELO+P+54272,7:NEXTP:NEXTV
5050 LO=LO-40:FORP=0TO4:POKELO+P,73+P:POKELO+P+54272,7:NEXT
5060 RETURN
5500 PRINTTAB(8)"██VUOI CONTINUARE? (Y/N)"
5510 GETA$:IFA$=""THEN5510
5520 IFA$="Y"THEN720
5530 IFA$="N"THEN560
5540 GOTO5510
```

La prima parte del programma definisce un certo numero di caratteri grafici per disegnare degli ideogrammi, a forma di pile di monete, che altrimenti non sarebbe stato possibile realizzare con i simboli presenti sulla tastiera del Commodore 64. La descrizione esula dalla trattazione degli aspetti prettamente matematici del libro ed è stata inserita a parte nell'Appendice B.

Le linee **500-720** comprendono il titolo e il menù principale. La subroutine **5000**, richiamata più volte, serve a disegnare alcune monete che in questo caso hanno solo una funzione estetica. Le variabili **RI**, **CO**, **NM** si riferiscono rispettivamente al numero di riga, di colonna e al numero di monete che dovranno comparire; il programmatore, specificando queste tre variabili prima del **GOSUB**, ottiene l'immagine come e dove desidera.

Il calcolo dello sconto in base a un certo tasso percentuale occupa le linee **1000-1830**. La relativa estensione della sezione è dovuta al fatto che il problema possiede quattro variabili (prezzo, sconto, costo, tasso

di sconto) ognuna delle quali può essere calcolata con varie combinazioni dei dati iniziali. Sarà il computer a guidarci nella scrittura delle costanti a noi note. Le variabili utilizzate sono: SC = sconto, PR = prezzo, C = costo, R = tasso di sconto.

Alle linee 2000-2850 viene calcolato l'interesse semplice e anche per esso le considerazioni sono analoghe a quelle esposte in precedenza. Le quattro principali variabili utilizzate sono: CA = capitale, IN = interesse; MO = montante, cioè il capitale più l'interesse, e R = tasso d'interesse. Ogni variabile può essere calcolata conoscendone almeno altre due.

L'interesse composto occupa le linee 3000-3540. La funzione utilizzata è quella riportata nel testo, prima del listato; nel programma essa è definita alla linea 400. L'input dei dati avviene alle linee 3040-3090. La durata è indicata in anni, mesi e giorni, poi tutto viene espresso in anni, come richiede la funzione di linea 400. Dopo aver scritto l'anno iniziale è possibile avere la situazione anno per anno, sotto forma di tabella (linee 3170-3200) e successivamente in forma grafica, con un ortogramma (linee 3350-3495). In entrambi i casi la stampa si ferma ogni 20 righe per consentire la lettura e procede alla pressione di un tasto (linee 3182-3187 e 3410-3440). L'ultima sezione riguarda il potere d'acquisto della lira. Dopo le spiegazioni preliminari (4020-4160) sono stati inseriti 14 coefficienti nelle istruzioni DATA (4190-4210) che permettono il confronto di capitali riferiti ad anni differenti. Il dimensionamento del vettore che li contiene è posto alla linea 4215. Questa istruzione può essere eseguita una sola volta durante l'esecuzione del programma e normalmente viene collocata all'inizio per evitare eventuali errori; in questo caso è stata utilizzata una variabile *flag* (DF) perché le linee 4215 e 4220 vengano eseguite una sola volta. Le istruzioni 4250 e 4280 accettano i due anni da porre a confronto e controllano che essi siano compresi nell'intervallo consentito. C1 e C2 sono i capitali riferiti ai due anni A1 e A2, mentre CF( ) indica un coefficiente.

La linea 4990 termina l'esecuzione del programma. Subito dopo si trova la subroutine 5000-5060 per disegnare le monete; la variabile LO si riferisce alla locazione della mappa dello schermo e, come è noto, può assumere valori compresi tra 1024 e 2023 per un totale di mille locazioni alle quali si accede con l'istruzione POKE. Sommando alla locazione della mappa video la costante 54272 si ottiene l'indirizzo della corrispondente locazione di memoria per il controllo del colore. 7 è il numero di codice del giallo e, infatti, le monete appaiono gialle.

La memoria utilizzata è di 8,7 Kbyte.

Proposte operative

Selezionate il 4 dal menù principale. Indicate come anno di partenza il 1975 ed un capitale iniziale di lire 1000.
Calcolate le lire equivalenti per l'anno 1983. Si avrà come risposta:

L. 1000 DELL'ANNO 1975
EQUIVALGONO A
L. 3540 DELL'ANNO 1983

Alla richiesta se si vuole continuare rispondete N, per tornare al menu principale. Selezionate ora il 3 per l'interesse composto e scrivete un capitale iniziale di lire 1000, un tasso di interesse medio del 12 per cento e un periodo di 8 anni, 0 mesi, 0 giorni (8,0,0). All'ultima domanda rispondete che il capitale viene composto 360 volte all'anno; otterrete in risposta:

AL TERMINE DEL PERIODO SU INDICATO IL
CAPITALE È DIVENTATO
L. 2611

Alla richiesta se si vuole continuare rispondete N, per tornare al menù principale. Selezionate ora il 3 per l'interesse composto e scrivete un Si avrà la tabella anno per anno alla quale si potrà far seguire il grafico. Sappiamo che per avere lo stesso potere d'acquisto si dovrebbero possedere, al termine, lire 3540.

ESERCIZIO 1-4
Scrivete un programma che confronti tre tabelle nelle quali vengono riportati anno per anno gli interessi composti derivanti dall'applicazione di 3 diversi tassi d'interesse.

ESERCIZIO 1-5
Scrivete un programma che calcoli il tasso d'interesse necessario perché un dato capitale iniziale, dopo un certo numero di anni, frutti un determinato montante ottenuto componendo gli interessi.

CAPITOLO DUE

Geometria elementare

IL NUMERO PI GRECO

Come è noto dalla geometria elementare il rapporto tra la circonferenza e il diametro è un numero che viene indicato con la lettera pi greco. L'irrazionalità di π è stata dimostrata per la prima volta da J.H. Lambert (1728-77), tuttavia in precedenza era già noto il suo sviluppo decimale fino a qualche centinaio di cifre dopo la virgola. Il programma fornisce due metodi per ottenere il calcolo di π. Il primo si basa su un'espressione trovata dal matematico inglese J. Wallis. La formula consiste in una serie infinita di prodotti di numeri razionali:

$$\pi = 2 \times \left(2 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \ldots\right)$$

Il secondo metodo si basa sulla considerazione che la misura del perimetro di un poligono inscritto, di n lati, tende alla circonferenza per $n \rightarrow \infty$. Se L_n indica la lunghezza di un lato di un poligono inscritto di n lati, allora il lato del poligono inscritto di $2n$ lati è dato dalla formula:

$$L_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_n^2}}$$

Dato un cerchio di raggio unitario, il lato del quadrato inscritto è uguale a $\sqrt{2}$; dalla formula segue che il lato di un poligono regolare di

otto lati, inscritto, è:

$$L_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

e di sedici lati:

$$L_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Più in generale:

$$L_{(2^n)} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$$

dove nel secondo membro ci sono $n - 1$ radici quadrate, una interna all'altra. Il perimetro è dato dal prodotto tra il numero dei lati 2^n e L_{2_n}. Ponendo $m = n\,1$ e dividendo per 2 si ottiene l'espressione

$$P/2 = 2^m \sqrt{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{2}}$$

con m radici quadrate una interna all'altra, il cui limite, per m tendente all'infinito, è il numero π.

```
10 REM *** CALCOLO DI PI GRECO ***
20 PRINT"■":POKE53280,6
30 PRINTTAB(6)"■■■■■■PREMI:"
40 PRINTTAB(6)"■1. PER IL MEDODO DI WALLIS"
50 PRINTTAB(6)"■2. PER IL METODO DEI"
60 PRINTTAB(6)"   POLIGONI INSCRITTI"
65 PRINTTAB(6)"■3. FINE■■■■"
70 PRINTTAB(12)"SCELTA:"
80 GETSC$:IFSC$=""THEN80
90 IFSC$="1"ORSC$="2"ORSC$="3"THEN110
100 GOTO80
110 POKE1804,ASC(SC$):POKE56078,14
115 GETA$:IFA$<>CHR$(13)THEN115
120 ONVAL(SC$)GOTO1000,2000,3000
130 GOTO80
970 REM
980 REM   METODO DI WALLIS
990 REM
1000 PRINT"■"
1010 PRINT"  IL MATEMATICO INGLESE JOHN WALLIS HA"
1020 PRINT"DATO LA SEGUENTE ESPRESSIONE CHE CONTIE-"
1030 PRINT"■NE UN PRODOTTO INFINITO."
1040 PRINT"■ ∠       2   4   4   6   6   8"
1050 PRINT"   - = 2 * - * - * - * - * - * ..."
1060 PRINT"  2       3   3   5   5   7   7"
1070 PRINT"■  IL VALORE DI PI GRECO VIENE CALCOLATO"
1080 PRINT"PER SUCCESSIVE APPROSSIMAZIONI."
```

```
1090 PRINT"  ALLA PRESSIONE DI UN TASTO SI AGGIUNGE"
1100 PRINT"□AL PRODOTTO UN ALTRO FATTORE DELLA SE-"
1110 PRINT"RIE."
1120 PRINT"■■  PER FINIRE PREMI IL TASTO F1.■■■"
1130 A=2:P=1:I=0
1140 GETK$:IFK$=""THEN1140
1150 IFASC(K$)=133THEN20
1160 I=I+1:P=P*A/(A-1)
1170 PRINTTAB(10-LEN(STR$(I)))STR$(I);")  π (";2*P
1180 GETK$:IFK$=""THEN1180
1190 IFASC(K$)=133THEN20
1200 I=I+1:P=P*A/(A+1)
1210 PRINTTAB(10-LEN(STR$(I)))STR$(I);")  π )";2*P
1220 A=A+2:PRINT:GOTO1140
1970 REM
1980 REM  METODO DEI POLIGONI INSCRITTI
1990 REM
2000 PRINT"□"
2010 PRINT"  IL NUMERO π SI PUO' DETERMINARE CALCO-"
2020 PRINT"□LANDO IL RAPPORTO TRA IL PERIMETRO DI"
2030 PRINT"UN POLIGONO INSCRITTO IN UNA CIRCONFE-"
2040 PRINT"RENZA ED IL DIAMETRO. AUMENTANDO IL NU-"
2050 PRINT"MERO DEI LATI INDEFINITAMENTE, DETTO"
2060 PRINT"RAPPORTO TENDE A π."
2070 PRINT"  IL PROGRAMMA CALCOLA LA LUNGHEZZA DEL"
2080 PRINT"LATO E DEL PERIMETRO DI UN POLIGONO RE-"
2090 PRINT"GOLARE, INSCRITTO IN UNA CIRCONFERENZA"
2095 PRINT"DI RAGGIO UNITARIO ED AVENTE UN NUMERO"
2096 PRINT"DI LATI ESPRIMIBILE COME POTENZA DI 2,"
2100 PRINT"CIOE' 4,8,16,..."
2105 PRINTTAB(4)"■■■■<PREMI UN TASTO PER CONTINUARE>"
2106 GETA$:IFA$=""THEN2106
2108 PRINT"□"
2110 INPUT"QUAL E' L'ESPONENTE DI 2";N
2120 N=INT(ABS(N)):IFN<11THEN2160
2130 PRINT"■SPIACENTE. IL VALORE E' TROPPO ALTO."
2140 PRINT"A CAUSA DELLE APPROSSIMAZIONI IL RISUL-"
2150 PRINT"TATO NON E' PIU' ATTENDIBILE.■":GOTO2110
2160 PRINT"■■NUMERO DEI LATI = 2□■";N;"■=";2↑N
2170 IFN>=2THEN2190
2180 PRINT"■UN POLIGONO DEVE AVERE ALMENO 3 LATI!■":GOTO2110
2190 L=SQR(2):IFN=2THEN2230
2200 IFN=3THEN2220
2210 FORV=1TON-3:L=SQR(2+L):NEXT
2220 L=SQR(2-L)
2230 P=2↑N*L
2240 PRINT"LATO =";L
2250 PRINT"PERIMETRO =";P
2260 PRINT"RAPPORTO TRA IL PERIMETRO"
2270 PRINT"ED IL DIAMETRO:"
2280 PRINTTAB(10)"■R =";P/2
2290 PRINTTAB(10)"π = 3.141592654..."
2300 PRINTTAB(8)"■■VUOI CONTINUARE? (Y/N)"
2310 GETK$:IFK$=""THEN2310
2320 IFK$="Y"THENPRINT"■":GOTO2110
2330 IFK$="N"THEN20
2340 GOTO2310
3000 PRINT"□":POKE53280,14:END
```

La POKE di linea 20 colora il bordo dello schermo e le linee seguenti, fino alla 70, costituiscono il menù per la scelta delle due sezioni. Le istruzioni 80-130 accettano la scelta e rinviano alle corrispondenti parti del programma. Le linee 1000-1220 riguardano il metodo di Wallis.

La routine che effettua il calcolo è preceduta dalle spiegazioni che ripetono quanto è contenuto nel testo; è anche indicato che per interrompere l'esecuzione dell'algoritmo bisogna premere il tasto di funzione F1 (codice ASCII 133). Alla linea 1130, A è il numeratore delle frazioni che compaiono nella formula e che assume sempre valori pari, P è il prodotto che rappresenta il valore approssimato della metà di pi greco, I è un contatore per tener conto del numero di operazioni eseguite. Le particolari istruzioni TAB che si trovano alle linee 1170 e 1210 servono per incolonnare i numeri progressivi con riferimento al margine destro.
La seconda sezione è stata fatta iniziare al numero di linea 2000 e, come nella precedente, sono state inserite le spiegazioni. Alla linea 2110 viene accettato l'esponente di due per ricavare il numero di lati del poligono inscritto che, per l'appunto, è uguale a una potenza di due. L'esponente è stato limitato a dieci, per il quale il numero dei lati è 1024; infatti, per valori maggiori, le approssimazioni insite nel calcolo non consentono più di ricavare il perimetro, e conseguentemente il numero pi greco, con una maggior precisione.
Il calcolo del lato è effettuato alle linee 2210 e 2220, dove L sta per lato, mentre alla linea seguente si ricava il perimetro. Le istruzioni 2240-2290 stampano i risultati e li pongono a confronto con il noto valore di pi greco.
Ecco un esempio di utilizzazione.

```
QUAL E' L'ESPONENTE DI 2?  8

                    8
NUMERO DEI LATI = 2   = 256
LATO = .024543078
PERIMETRO = 6.28302797
RAPPORTO TRA IL PERIMETRO
ED IL DIAMETRO:

        P = 3.14151398
        π = 3.141592654...


     VUOI CONTINUARE? (Y/N)
```

ESERCIZIO 2-1
Scrivete un programma per calcolare la lunghezza di una corda noti il raggio e la sua distanza dal centro.

VOLUME DELLA PIRAMIDE

Il volume della piramide si calcola con la nota formula:

$$V = A_{base} \times h/3$$

Da un punto di vista didattico è utile mostrare come si giunge a una formula o almeno verificare, anche in modo approssimato, la sua esattezza.

Ad esempio a un livello elementare, si potrà notare, usando dei modelli materiali, che un contenitore a forma piramidale, ha una capacità 3 volte inferiore rispetto a un altro, a forma di prisma, avente la stessa base e la stessa altezza.

Certo la prova dei contenitori non è una dimostrazione, nel senso matematico, ma costituisce piuttosto una base di partenza su cui costruire poi il concetto astratto. Per giungere alla formula, si può immaginare di sezionare la piramide con innumerevoli piani paralleli alla base e di approssimare i tronchi di piramide che così si ottengono a dei prismi, il volume dei quali è facilmente calcolabile. (fig. 3a). Detti h l'altezza della piramide e s lo spigolo della base, ogni prisma avrà un'altezza Δx, parte ennesima di h e uno spigolo di base $y = x \times s/h$. (vedi fig. 3b). Il volume di ogni prisma è pertanto $\Delta V = y^2 \times \Delta x$.

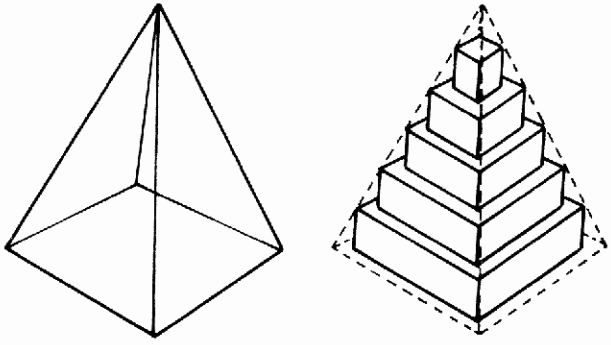


Fig. 3

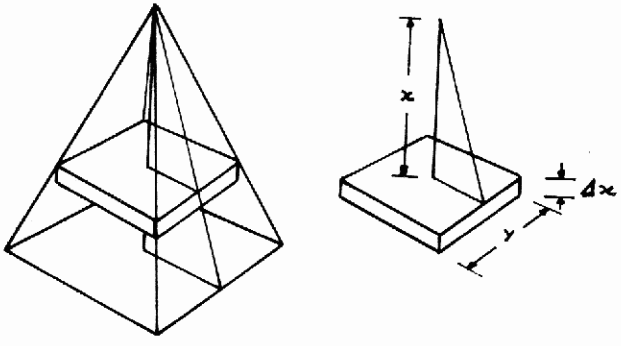


Fig. 3b

Integrando, il volume della piramide risulta:

$$V = \int_0^h y^2 dx = \frac{s^2}{h^2} \times \int_0^h x^2 dx = \frac{s^2 h}{3}$$

Per tutto ciò, tuttavia, non è necessario un computer. Esso diventa indispensabile, invece, quando si voglia verificare la formula per successive approssimazioni.
Si può infatti dividere l'altezza in un grande numero di parti e calcolare il volume dei prismi inscritti aventi per altezze la parte ennesima di h. Il volume dei prismi inscritti rappresenta una approssimazione per difetto del volume della piramide.
Aumentando il numero n delle suddivisioni il volume complessivo dei prismi tende indefinitamente al volume della piramide.
Non sarà difficile al computer dividere l'altezza in 100, 200, 300, ..., 1000 o più parti e ottenere in rapida successione le risposte verificando che la serie dei risultati, per n tendente all'infinito (si fa per dire), ha come limite il valore calcolato con la formula:

$$V = \frac{A \times h}{3}$$

```
1 REM     VOLUME DELLA PIRAMIDE
2 REM ******************************
5 PRINT"■":POKE52,48:POKE56,48
6 PRINTTAB( 10)"■■■■■■■■■■■■UN MOMENTO PREGO"
10 POKE56334,PEEK( 56334)AND254:POKE1,PEEK( 1)AND251
20 FORI=0TO839:POKEI+12288,PEEK( I+53248):NEXT
30 POKE1,PEEK( 1)OR4:POKE56334,PEEK( 56334)OR1
40 POKE53272,(PEEK( 53272)AND240)+12
50 FORCH=65TO85:IFCH>76ANDCH<81THEN75
55 FORBY=0TO7
60 READNU:POKE12288+8*CH+BY,NU
70 NEXTBY
75 NEXTCH
80 PRINTCHR$( 147):POKE53280,6
90 DIM P( 126,2)
100 DATA 0,0,0,0,3,12,48,192
110 DATA 0,0,0,0,192,48,12,3
120 DATA 192,176,140,131,129,129,129,129
130 DATA 3,13,49,129,1,1,1,1
140 DATA 129,129,129,129,193,49,13,3
150 DATA 1,1,1,1,3,12,48,192
160 DATA 3,12,48,192,192,176,140,131
170 DATA 192,48,12,3,0,0,0,0
180 DATA 1,1,1,1,193,49,13,3
190 DATA 192,176,140,131,128,128,128,128
200 DATA 128,128,128,128,192,48,12,3
210 DATA 192,48,12,3,1,1,1,1
220 DATA 3,12,48,192,0,0,0,0
230 DATA 192,48,12,3,3,13,49,193
240 DATA 192,48,12,3,192,48,12,3
250 DATA 3,12,48,192,3,12,48,192
260 DATA 3,7,15,27,51,99,195,131
300 DATA 1194,65,1195,66,1234,67,1235,68
310 DATA 1273,71,1274,69,1275,70,1276,82
320 DATA 1312,65,1313,101,1314,76
330 DATA 1315,81,1316,103,1317,66,1352,74
340 DATA 1353,83,1354,73,1355,65,1356,84
350 DATA 1357,68,1391,71,1392,75,1393,32
360 DATA 1394,76,1395,81,1396,32,1397,70
```

```
370 DATA 1398,82,1430,65,1431,101,1432,72
380 DATA 1433,83,1434,73,1435,65,1436,84
390 DATA 1437,81,1438,103,1439,66,1470,74
400 DATA 1471,83,1472,66,1473,32,1474,76
410 DATA 1475,81,1476,32,1477,65,1478,84
420 DATA 1479,68,1509,71,1510,75,1511,32
430 DATA 1512,72,1513,83,1514,73,1515,65
440 DATA 1516,84,1517,81,1518,32,1519,70
450 DATA 1520,82,1548,65,1549,101,1550,72
460 DATA 1551,83,1552,66,1553,32,1554,76
470 DATA 1555,81,1556,32,1557,65,1558,84
480 DATA 1559,81,1560,103,1561,66,1588,74
490 DATA 1589,83,1590,66,1591,32,1592,72
500 DATA 1593,83,1594,73,1595,65,1596,84
510 DATA 1597,81,1598,32,1599,65,1600,84
520 DATA 1601,68,1628,75,1629,32,1630,72
530 DATA 1631,83,1632,66,1633,32,1634,76
540 DATA 1635,81,1636,32,1637,65,1638,84
550 DATA 1639,81,1640,32,1641,70,1669,72
560 DATA 1670,66,1671,32,1672,72,1673,83
570 DATA 1674,73,1675,65,1676,84,1677,81
580 DATA 1678,32,1679,65,1680,81
590 DATA 1711,72,1712,66,1713,32,1714,76
600 DATA 1715,81,1716,32,1717,65,1718,81
610 DATA 1753,72,1754,73,1755,65,1756,81
800 LC=54272:POKE1238,85:POKE1238+LC,14
810 FORJ=1277TO1433STEP39:POKEJ,78:POKEJ+LC,14:NEXT
820 FORJ=1278TO1518STEP40:POKEJ,103:POKEJ+LC,14:NEXT
830 FORJ=1473TO1557STEP42:POKEJ,72:POKEJ+LC,14:POKEJ+1,66:POKEJ+1+LC,14:NE
840 POKE1558,73:POKE1558+LC,14
845 FORJ=1559TO1483STEP-38:POKEJ,65:POKEJ+LC,14:POKEJ+1,81:POKEJ+1+LC,14:N
846 FORJ=1239TO1444STEP41:POKEJ,77:POKEJ+LC,14:NEXT
850 PRINTTAB(8)"■■■■■■■■■■■■■■■■VOLUME DELLA PIRAMIDE"
860 FORJ=1TO126:READP(J,1),P(J,2):NEXT
870 FORT=1TO3000:NEXT
1000 PRINT"■IL VOLUME DI UNA PIRAMIDE SI CALCOLA"
1010 PRINT"CON LA BEN NOTA FORMULA:■"
1020 PRINTTAB(8)"        BASE X ALTEZZA"
1030 PRINTTAB(8)"VOL. = ──────────────"
1040 PRINTTAB(8)"                3"
1050 PRINT"■PER VERIFICARE IL RISULTATO POSSIAMO"
1060 PRINT"IMMAGINARE LA PIRAMIDE FORMATA DA UN"
1070 PRINT"GRAN NUMERO DI PRISMI SOVRAPPOSTI E AD"
1080 PRINT"ESSA INSCRITTI."
1085 PRINT"SAPPIAMO INFATTI CALCOLARE IL VOLUME DI"
1086 PRINT"UN PRISMA.■"
1090 GOSUB3000
1100 PRINT"■"
1110 FORJ=1TO126:POKEP(J,1),P(J,2):POKEP(J,1)+54272,14:NEXT
1120 PRINTTAB(20)"ALL'AUMENTARE DEL"
1130 PRINTTAB(20)"NUMERO DEI PRISMI"
1140 PRINTTAB(20)"INSCRITTI IL LORO"
1150 PRINTTAB(20)"VOLUME TENDE A"
1160 PRINTTAB(20)"QUELLO DELLA"
1170 PRINTTAB(20)"PIRAMIDE.■"
1180 PRINTTAB(20)"SE SCEGLIETE IL"
1190 PRINTTAB(20)"NUMERO DEI PRISMI"
1200 PRINTTAB(20)"INDICANDO IN QUANTE"
1210 PRINTTAB(20)"PARTI DEVE ESSERE"
1220 PRINTTAB(20)"DIVISA L'ALTEZZA,"
1230 PRINTTAB(20)"QUESTO PROGRAMMA"
1240 PRINTTAB(20)"CALCOLA IL LORO"
1250 PRINTTAB(20)"VOLUME COMPLESSIVO"
1260 PRINTTAB(20)"E LO CONFRONTA CON"
1270 PRINTTAB(20)"QUELLO DELLA"
1280 PRINTTAB(20)"PIRAMIDE.■■"
1290 GOSUB3000
```

```
1300 PRINT"■SUPPONIAMO CHE LO SPIGOLO DI BASE SIA"
1310 PRINT"10 CM E CHE L'ALTEZZA MISURI 30 CM."
1315 PRINT"IL VOLUME DELLA PIRAMIDE E' QUINDI:"
1316 PRINTTAB(12)"■■V = 1000 CM□3■"
1320 PRINT"SCRIVI IN QUANTE PARTI VUOI DIVIDERE"
1330 PRINT"L'ALTEZZA."
1340 PRINT"PER FINIRE RISPONDI CON UNO 0."
1350 INPUT"■N =";N:N=ABS(N):IFN=0THEN2000
1360 V=0:H=30/N
1370 FORJ=1TON-1:X=10*(1-J/N):V=V+X*X*H:NEXT
1380 PRINT"VOLUME =";V:GOTO1350
2000 PRINT"■       VUOI RICOMINCIARE? (Y/N)"
2010 GETK$:IFK$=""THEN2010
2020 IFK$="Y"THEN1000
2030 IFK$="N"THEN2050
2040 GOTO2010
2050 POKE53272,21:POKE53280,14:PRINT"■":END
3000 PRINT"■  - PREMI UN TASTO PER CONTINUARE -"
3010 GETK$:IFK$=""THEN3010
3020 RETURN
```

Le linee 5-75 ridefiniscono i caratteri compresi tra il numero 65 e l'85, in modo da renderli idonei a rappresentare le immagini utilizzate nel corso del programma. Successivamente viene modificato il colore del bordo e viene dimensionata la matrice bidimensionale P che più avanti conterrà le locazioni video e i numeri dei caratteri precedentemente ridefiniti per la loro opportuna collocazione, come in un mosaico. L'uso di una matrice non è, in verità, indispensabile e sarebbe possibile utilizzare le locazioni leggendole direttamente dalle istruzioni DATA. Tuttavia, mentre alcuni tipi di Basic permettono di riportare il puntatore a una qualsiasi linea DATA, per utilizzare le informazioni ivi contenute, nel Commodore 64 l'istruzione RESTORE riporta il puntatore sempre all'inizio. Pertanto dovendo creare più volte le stesse immagini e dovendo ricorrere più volte agli stessi gruppi di informazioni è preferibile, pur consumando una maggiore quantità di memoria, trasferirle in una matrice per i cui elementi almeno non sussiste alcun problema di puntatore.

Le istruzioni DATA occupano gran parte del listato. Le prime, dalla linea 100 alla 260, si riferiscono alla forma dei nuovi caratteri e contengono un numero decimale per ognuna delle otto righe che formano un carattere. Le seconde (300-610) contengono invece le locazioni video e i numeri dei caratteri necessari per formare le figure; è come se fosse scritto: alla locazione 1194 va posto il carattere 65, alla 1195 il carattere 66 ecc. Quando si indirizza un carattere alla mappa-video con una POKE è necessario caricare anche la locazione per il controllo del colore che è posta a un valore superiore di 54272 unità rispetto alla precedente. Così il colore della casella di locazione 1024, nella mappavideo, si trova all'indirizzo 1024 + 54272. Alla linea 800 tale differenza è stata attribuita alla variabile LC (locazione colore).

La parte del programma compresa tra le istruzioni 800 e 870 costitui-

sce il titolo mentre le successive (linee **1000-1290**) illustrano lo scopo del programma. L'**INPUT 1350** accetta il numero di parti in cui si desidera suddividere l'altezza che è stata posta uguale a 30 cm.
La routine **1360-1370** calcola il volume complessivo dei prismi inscritti nella piramide e la linea successiva stampa il risultato. **V** rappresenta quindi il volume della piramide approssimato per difetto.
Il programma è ciclico e permette di mettere in evidenza la convergenza della serie dei volumi così ottenuti all'aumentare di **N**.
Al termine, la linea **2050** ripristina il normale set di caratteri e il colore del bordo.
Ecco un esempio di utilizzazione.

```
SUPPONIAMO CHE LO SPIGOLO DI BASE SIA
10 CM E CHE L'ALTEZZA MISURI 30 CM.
IL VOLUME DELLA PIRAMIDE E' QUINDI:
                    3
          V = 1000 CM
SCRIVI IN QUANTE PARTI DIVIDERE
L'ALTEZZA.
PER FINIRE RISPONDI CON UNO 0.

N =? 100
VOLUME = 985.05

N =? 200
VOLUME = 992.5125

N =? 300
VOLUME = 995.005557

N =?
```

IL TEOREMA DI PITAGORA

Il teorema è fin troppo noto per essere trattato qui da un punto di vista matematico, in ogni caso il programma contiene una sezione in cui vengono forniti gli elementi essenziali accompagnati da qualche rappresentazione grafica. Nella parte applicativa, viene calcolata la misura di un cateto o dell'ipotenusa dopo aver introdotto la misura degli altri due lati di un triangolo rettangolo. Un pregio consiste nell'elaborazione non solo del risultato ma anche dei passaggi che conducono a esso, il tutto presentato con la più appropriata simbologia ottenuta mediante la definizione di caratteri particolari.
Il programma è completato da una sezione che permette di verificare se tre numeri formano una terna pitagorica o di creare nuove terne a piacimento.
Tre numeri: a, b, c, formano una terna pitagorica semplicemente quando soddisfano la condizione

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Invece per creare una terna pitagorica si possono usare le seguenti formule:

$a = 2mn;\ b = m^2 - n^2;\ c = m^2 + n^2;$

dove m e n sono due numeri arbitrari tali che sia $m > n$.

```
10 REM    TEOREMA DI PITAGORA
20 REM ************************
30 PRINT"■":POKE53280,6
35 POKE52,48:POKE56,48
40 FORSP=0TO3:POKE2040+SP,192+SP:NEXTSP
45 FORSP=0TO3:POKE2044+SP,192+SP:NEXTSP
50 FORS=12288TO12543:READQ:POKES,Q:NEXTS
80 V=53248:POKEV+21,255
90 FORJ=0TO15:POKEV+J,1:NEXT
100 POKEV+29,255:POKEV+23,255
110 POKEV+42,1:POKEV+6,80:POKEV+7,118
120 POKE1348,108:POKE55620,14
130 FORJ=0TO1:POKE1349+J,98:POKE55621+J,14:NEXT
140 FORK=1388TO1428STEP40:POKEK,225:POKEK+54272,14
150 FORJ=1TO2:POKEK+J,160:POKEK+54272+J,14:NEXTJ:NEXTK
160 FORK=1471TO1670STEP40:FORJ=0TO4
170 POKEK+J,160:POKEK+J+54272,14
180 NEXTJ:NEXTK
190 FORK=43TO46:POKEV+K,14:NEXT
200 POKEV+12,52:POKEV+13,76
210 POKEV+14,100:POKEV+15,80
220 POKEV+8,120:POKEV+9,98
230 POKEV+10,74:POKEV+11,118
240 FORK=1273TO1353STEP40:FORJ=0TO2
250 POKEK+J,160:POKEK+J+54272,14
260 NEXTJ:NEXTK
270 PRINTTAB(16)"■■■■■■■■■■■■TEOREMA DI"
280 PRINTTAB(16)"PITAGORA"
290 PRINTTAB(5)"■■■■■■■■K PREMI UN TASTO PER INIZIARE>"
300 GETA$:IFA$=""THEN300
310 FORJ=6TO15:POKEV+J,1:NEXT
320 PRINT"■"
330 PRINTTAB(6)"■■■■■■■■PREMI:"
340 PRINTTAB(6)"■1. PER LA DIMOSTRAZIONE."
350 PRINTTAB(6)"■2. PER LE FORMULE."
360 PRINTTAB(6)"■3. PER LE APPLICAZIONI."
370 PRINTTAB(6)"■4. PER LE TERNE PITAGORICHE."
380 PRINTTAB(6)"■5. PER FINIRE."
390 GETA$:IFA$=""THEN390
400 S=ASC(A$)-48:IFS<1ORS>5THEN390
410 ONSGOTO1000,2000,3000,4000,6000
420 GOTO390
1000 PRINT"■":REM *** DIMOSTRAZIONE ***
1010 PRINTTAB(10)"— DIMOSTRAZIONE —"
1020 PRINT"■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■PRENDIAMO DUE QUADRATI UGUALI"
1030 FORT=1TO1000:NEXT
1040 FORK=1390TO1670STEP40:FORJ=0TO7
1050 POKEK+J,160:POKEK+J+54272,14
1060 NEXTJ:NEXTK
1070 FORK=1406TO1686STEP40:FORJ=0TO7
1080 POKEK+J,160:POKEK+J+54272,14
1090 NEXTJ:NEXTK
1095 FORT=1TO2000:NEXT:GOSUB5600:GOSUB5500
1100 PRINT"□□□□SUL PRIMO DISEGNAMO QUATTRO TRIANGOLI"
1110 PRINT"RETTANGOLI UGUALI."
```

```
1115 FORT=1TO2000:NEXT
1120 POKEV+6,92:POKEV+7,123
1130 POKEV+46,1:POKEV+14,92:POKEV+15,123
1135 FORT=1TO2000:NEXT
1140 POKEV+40,7:POKEV+44,7
1150 POKEV+2,88:POKEV+3,122
1160 POKEV+10,88:POKEV+11,122
1165 FORT=1TO2000:NEXT
1170 POKEV+39,15:POKEV+43,15
1180 POKEV,72:POKEV+1,143
1190 POKEV+8,72:POKEV+9,143
1195 FORT=1TO2000:NEXT
1200 POKEV+41,2:POKEV+45,2
1210 POKEV+4,44:POKEV+5,144
1220 POKEV+12,44:POKEV+13,144
1230 FORT=1TO2000:NEXT
1240 GOSUB5600:GOSUB5500
1250 PRINT"□□□□LA SUPERFICIE AZZURRA RAPPRESENTA"
1260 PRINT"I QUADRATI COSTRUITI SUI CATETI."
1270 GOSUB5600:GOSUB5500
1280 PRINT"□□□□RA TRASPORTIAMO UNO AD UNO I QUATTRO"
1290 PRINT"TRIANGOLI SUL SECONDO QUADRATO..."
1300 FORT=1TO2000:NEXT
1310 FORX=44TO216:POKEV+12,X:NEXT
1315 FORT=1TO1000:NEXT
1320 FORX=72TO200:POKEV+8,X:NEXT
1330 FORY=143TO122STEP-1:POKEV+9,Y:NEXT
1335 FORT=1TO1000:NEXT
1340 FORX=88TO216:POKEV+10,X:NEXT
1345 FORT=1TO1000:NEXT
1350 FORX=92TO200:POKEV+14,X:NEXT
1360 FORY=123TO167:POKEV+15,Y:NEXT
1370 GOSUB5600:GOSUB5500
1380 PRINT"□□□□NEL SECONDO QUADRATO LA SUPERFICIE"
1390 PRINT"AZZURRA RAPPRESENTA IL QUADRATO"
1400 PRINT"COSTRUITO SULL'IPOTENUSA.□"
1410 GOSUB5600:GOSUB5500
1420 PRINT"□□□□LE SUPERFICI AZZURRE SUI DUE QUADRATI"
1430 PRINT"SONO EQUIVALENTI."
1440 GOSUB5600:GOSUB5500
1450 FORJ=39TO46:POKEV+J,6:NEXT
1455 POKEV+6,95:POKEV+7,125
1460 FORK=1510TO1670STEP40:FORJ=0TO2
1470 POKEK+J,32:NEXTJ:NEXTK
1480 FORK=1393TO1473STEP40:FORJ=0TO4
1490 POKEK+J,32:NEXTJ:NEXTK
1495 POKEV+1,145:POKEV+5,145
1500 PRINT"□□□□LA SOMMA DEI DUE QUADRATI DI SINISTRA"
1510 PRINT"E' EQUIVALENTE AL QUADRATO DI DESTRA."
1520 GOSUB5600:GOSUB5500
1530 PRINT"□□□□DISEGNAMO NUOVAMENTE IL TRIANGOLO E"
1540 PRINT"IL QUADRATO COSTRUITO SULL'IPOTENUSA."
1550 FORT=1TO2000:NEXT
1560 POKEV+42,1
1570 POKEV,96:POKEV+1,79
1580 POKEV+2,112:POKEV+3,82
1590 POKEV+4,112:POKEV+5,104
1600 FORK=1193TO1473STEP40:FORJ=0TO7
1610 POKEK+J,160:POKEK+J+54272,14
1620 NEXTJ:NEXTK
1630 GOSUB5600:GOSUB5500
1640 PRINT"□□□□■DEFINIZIONE□■ IL QUADRATO COSTRUITO SULLA"
1650 PRINT"IPOTENUSA E' EQUIVALENTE ALLA SOMMA DEI"
1660 PRINT"QUADRATI COSTRUITI SUI CATETI.□"
1670 GOSUB5600:GOSUB5500
1680 PRINT"□"
```

```
1690 FORJ=0TO15:POKEV+J,1:NEXT
1700 GOTO330
2000 PRINT"▙":REM *** FORMULE ***
2010 PRINTTAB(12)"- FORMULE -"
2020 PRINT"▓▓▓    /\    /\          2   2   2"
2030 PRINT"   /  \  /  \        A + B = C"
2040 PRINT"  /    \/    \"
2050 PRINT"  \    /\    /"
2060 PRINT"   \ A/  \B /            ________"
2070 PRINT"    \/    \/             | 2   2"
2080 PRINT"     ┌─────┐        C = \/ A + B"
2090 PRINT"     | C   |"
2100 PRINT"     |     |             ________"
2110 PRINT"     |     |             | 2   2"
2120 PRINT"     |     |        A = \/ C - B"
2130 PRINT"     └─────┘"
2140 PRINTTAB(24)"________"
2150 PRINTTAB(24)"| 2   2"
2160 PRINTTAB(19)"B = \/ C - A▓▓"
2170 GOSUB5600:GOTO320
3000 PRINT"▙":REM *** APPLICAZIONI ***
3010 PRINTTAB(10)"- APPLICAZIONI -▓▓"
3020 PRINTTAB(16)"▓◤◥":PRINTTAB(15)"▓◤  ◥"
3030 PRINTTAB(14)"▓◤     ◥":PRINTTAB(12)"A▓◤        ◥▓B"
3040 PRINTTAB(12)"▓◤          ◥"
3050 PRINTTAB(11)"▓◤            ◥"
3060 PRINTTAB(17)"▓C"
3120 PRINT"▓COSA VUOI CONOSCERE? (A-B-C)"
3130 GETA$:IFA$=""THEN3130
3140 S=ASC(A$)-64:IFS<1ORS>3THEN3130
3150 POKE1574,S:POKE55846,14
3160 ONSGOTO3200,3250,3300
3170 GOTO3130
3200 PRINT:INPUT"B =";W2:INPUT"C =";W1
3210 IFNOT(W2<W1)THENPRINT"DEVE ESSERE C>B, RIPETI.":GOTO3200
3220 W$=" -":GOTO3400
3250 PRINT:INPUT"A =";W2:INPUT"C =";W1
3260 IFNOT(W2<W1)THENPRINT"DEVE ESSERE C>A, RIPETI.":GOTO3250
3270 W$=" -":GOTO3400
3300 PRINT:INPUT"A =";W1:INPUT"B =";W2
3310 W$=" +"
3400 PRINT:Z1$=STR$(INT(100*W1*W1)/100)
3405 Z1$=RIGHT$(Z1$,LEN(Z1$)-1)
3410 Z2$=STR$(INT(100*W2*W2)/100)
3420 Z1$=Z1$+W$+Z2$:IFW$=" +"THEN3440
3430 Z2$=STR$(INT(100*(W1*W1-W2*W2))/100):GOTO3450
3440 Z2$=STR$(INT(100*(W1*W1+W2*W2))/100)
3450 Z2$=RIGHT$(Z2$,LEN(Z2$)-1):PRINTTAB(5)
3460 FORJ=1TOLEN(Z1$)+1:PRINT"_";:NEXT
3470 PRINT:PRINTTAB(5)"| ":PRINTA$;" = \/ ";Z1$;" ="
3480 PRINT:PRINT"      ";
3490 FORJ=1TOLEN(Z2$)+1:PRINT"_";:NEXT
3500 PRINT:PRINTTAB(5)"| "
3510 PRINT"  = \/ ";Z2$;" =";INT(100*SQR(VAL(Z2$)))/100
3520 PRINTTAB(8)"▓▓VUOI CONTINUARE? (Y/N)"
3530 GETA$:IFA$=""THEN3530
3540 IFA$="Y"THEN3000
3550 IFA$="N"THEN320
3560 GOTO3530
4000 PRINT"▙":REM *** TERNE PITAG. ***
4010 PRINTTAB(9)"- TERNE PITAGORICHE -"
4020 PRINT"▓PREMI: 1. PER VERIFICARE SE TRE NUMERI"
4030 PRINTTAB(10)"FORMANO UNA TERNA PITAGORICA"
4040 PRINTTAB(7)"▓2. PER CREARE TERNE PITAGORICHE"
4050 GETA$:IFA$=""THEN4050
4060 IFA$="1"THEN4100
```

```
4070 IFA$="2"THEN4300
4080 GOTO4050
4100 PRINT"■■ SCELTA 1: ■ SCRIVI I TRE NUMERI"
4110 PRINTTAB(12)"SEPARATI DA UNA VIRGOLA.■"
4120 INPUTNT(1),NT(2),NT(3)
4130 MX=0:FORJ=1TO3:NT(J)=ABS(NT(J))
4140 IFNT(J)>MXTHENMX=NT(J)
4150 NEXTJ
4160 SC=0:FORJ=1TO3:IFNT(J)=MXTHENMX=MX*MX:GOTO4175
4170 SC=SC+NT(J)*NT(J)
4175 NEXTJ
4180 IFMX=SCTHEN4210
4190 PRINT"■NO, I TRE NUMERI NON FORMANO UNA TERNA"
4200 PRINT"PITAGORICA.":GOTO4600
4210 PRINT"■SI, I TRE NUMERI FORMANO UNA TERNA"
4220 PRINT"PITAGORICA.":GOTO4600
4300 PRINT"■■ SCELTA 2: ■ SCRIVI DUE NUMERI SEPARATI"
4310 PRINTTAB(12)"DA UNA VIRGOLA.■"
4320 INPUTN1,N2:N1=ABS(N1):N2=ABS(N2)
4325 IFN1=0THENN1=N1+1
4326 IFN2=0THENN2=N2+1
4330 IFN1=N2THENN1=N1+1:GOTO4350
4340 IFN1<N2THENNX=N1:N1=N2:N2=NX
4350 PRINT"■TERNA:"SPC(6);2*N1*N2;"-";N1*N1-N2*N2;"-";N1*N1+N2*N2
4600 PRINTTAB(8)"■■VUOI CONTINUARE? (Y/N)"
4610 GETA$:IFA$=""THEN4610
4620 IFA$="Y"THEN4000
4630 IFA$="N"THEN320
4640 GOTO4610
5000 REM   PRIMO SPRITE
5010 DATA 255,192,0,255,192,0,255,128,0
5020 DATA 255,128,0,255,0,0,255,0,0
5030 DATA 254,0,0,254,0,0,252,0,0
5040 DATA 252,0,0,248,0,0,248,0,0
5050 DATA 240,0,0,240,0,0,224,0,0
5060 DATA 224,0,0,192,0,0,192,0,0
5070 DATA 128,0,0,128,0,0,0,0,0,0
5100 REM   SECONDO SPRITE
5110 DATA 15,255,255,3,255,255,0,255,255
5120 DATA 0,63,255,0,15,255,0,3,255
5130 DATA 0,0,255,0,0,63,0,0,15
5140 DATA 0,0,3,0,0,0,0,0,0,0
5150 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
5160 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
5170 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
5200 REM   TERZO SPRITE
5210 DATA 0,0,0,0,0,1,0,0,1
5220 DATA 0,0,3,0,0,3,0,0,7
5230 DATA 0,0,7,0,0,15,0,0,15
5240 DATA 0,0,31,0,0,31,0,0,63
5250 DATA 0,0,63,0,0,127,0,0,127
5260 DATA 0,0,255,0,0,255,0,1,255
5270 DATA 0,1,255,0,3,255,0,3,255,0
5300 REM   QUARTO SPRITE
5310 DATA 192,0,0,240,0,0,252,0,0
5320 DATA 255,0,0,255,192,0,255,240,0
5330 DATA 255,252,0,255,255,0,255,255,192
5340 DATA 255,255,240,0,0,0,0,0,0
5350 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
5360 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
5370 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
5500 FORLS=1744TO1983:POKELS,32:POKELS+54272,6:NEXT:RETURN
5600 PRINTTAB(10)"■(PREMI UN TASTO)"
5610 GETA$:IFA$=""THEN5610
5620 RETURN
6000 POKEV+21,0:PRINT"■":POKE53280,14:END
```

La linea 30 pulisce lo schermo e modifica il colore del bordo mentre la 35 limita l'area di memoria disponibile al programma Basic per non avere sovrapposizioni oltre la locazione 12288 ove verranno collocati i dati relativi alla forma degli sprite che contribuiranno a dare vita alle figure utilizzate nel programma.
Gli *sprite*, o disegni mobili sullo schermo, si rendono necessari perché la dimostrazione del teorema è resa più penetrante e intuitiva con lo spostamento di alcuni elementi della figura in una sorta di animazione grafica.
Gli sprite vengono creati all'inizio del programma e, in un certo senso, "parcheggiati" in una zona non visibile dello schermo (istruzione

La parte iniziale del programma, oltre a definire gli sprite, crea il titolo e presenta il menù con quattro opzioni operative più una quinta per chiudere il progamma. La linea 400 attribuisce alla S un valore compreso tra 1 e 5, a seconda del tasto premuto. Le linee 1000-1700 forniscono una dimostrazione del teorema che si svolge in varie fasi che si susseguono alla pressione di un tasto qualsiasi. La dimostrazione è molto comune ed è presente in tutti i testi elementari, ma è resa più viva dall'animazione grafica.
Le istruzioni principali della sezione sono cicli FOR NEXT per spostare gli sprite sullo schermo. Ricordiamo che la variabile V contiene la locazione 53248 che costituisce la base di tutte quelle relative agli sprite.
Le linee 2000-2170 utilizzano i normali caratteri grafici per creare un'illustrazione e presenta le formule che si usano nelle applicazioni del teorema.
La sezione successiva permette di calcolare un lato di un triangolo rettangolo conoscendo gli altri due. I due elementi noti vengono accettati nelle variabili W1 e W2 mentre alcune linee controllano che la misura dell'ipotenusa non sia inferiore a quella dei cateti. W$ contiene il segno, più o meno, da inserire nella formula.
L'ultima parte della sezione (linee 3400-3510) presenta la soluzione attraverso vari passaggi. La forma si discosta da quella normalmente ottenibile, nel modo più semplice, con un computer e si avvicina a quella che uno studente dovrebbe usare nella soluzione di simili problemi.
Nei programmi didattici è giustificato lo sforzo per rendere più chiari e comprensibili i risultati, senza eccessive preoccupazioni di occupare, in questo modo, una maggiore quantità di memoria.
L'ultima sezione (linee 4000-4640) verifica che tre numeri formino una terna pitagorica o, a richiesta fornisce nuove terne. Nel primo caso i tre numeri vengono accettati nella variabile con indice NT(J); MX contiene il maggiore dei tre.

La routine 4160-4175 calcola il quadrato del maggiore dei tre numeri (ancora MX) e la somma dei quadrati degli altri due (SC). La linea 4180 controlla se è soddisfatta la condizione per poter affermare che i tre numeri costituiscono una terna pitagorica mentre le linee successive scrivono il risultato.
Nel secondo caso, l'utente deve specificare due numeri (N1 e N2) a partire dai quali verrà ricavata una terna.
Il calcolo è compreso nell'istruzione 4350 che stampa la risposta dopo aver accertato che i due numeri indicati soddisfino determinate condizioni, cioè che siano positivi, maggiori di zero e che N1 sia maggiore di N2.
L'ultima parte del listato contiene le istruzioni DATA contenenti le informazioni sulla forma degli sprite che, come è noto, occupano una matrice di 24 × 21 punti per un totale di 63 byte di memoria.
La linea 5500 contiene una subroutine per cancellare una parte dello schermo e quelle seguenti un'altra subroutine per inviare un messaggio.
L'istruzione 6000 disabilita gli sprite, cancella lo schermo, ripristina il colore del bordo e chiude il programma.

ANGOLI E DISTANZE

Aristarco di Samo, contemporaneo di Euclide, è conosciuto soprattutto per la sua ipotesi eliocentrica. Misurando l'angolo formato alle congiungenti Terra-Luna e Terra-Sole durante una fase di mezza luna riuscì a stabilire in modo sia pur grossolanamente approssimato, il rapporto tra le distanze della Luna e del Sole dalla Terra, deducendo che la seconda è enormemente più grande della prima. Un altro grande geografo ed astronomo del passato, Eratostene, basandosi ancora su misure angolari, riuscì a stabilire la misura del raggio della Terra con un errore del 15 per cento. Grandi risultati per i mezzi a disposizione 2000 anni fa!
La nostra esperienza quotidiana ci induce a sottovalutare le possibilità offerte dalle misure angolari, ma appena si esce dalle pareti domestiche non è difficile rendersi conto delle difficoltà insite nella misura diretta delle distanze. Quanto è alta quella casa o quella montagna? Quanto è lontana quella casa al di là del fiume? O addirittura, quant'è lontana la Luna? Senza una misura angolare non si potrebbe aver alcuna risposta. È vero che gli strumenti adatti per misurare con precisione gli angoli non sono generalmente disponibili alla maggior parte delle persone, tuttavia è ugualmente importante capire i principi sui quali si basano certi metodi anche se poi non si arriverà mai a utilizzarli nella pratica.

Interroghiamo il nostro Commodore 64. La prima sezione del programma tratta la conversione delle misure angolari da radianti a gradi decimali a gradi sessagesimali e le quattro operazioni con gli angoli; la seconda e la terza sezione sono dedicate alle applicazioni. Come misurare l'altezza di una casa? Semplice. La parete forma col suolo un angolo retto, quindi scegliamo il caso di un triangolo rettangolo. Supponiamo di trovarci a 10 metri dalla casa (almeno una misura diretta è necessaria) e di osservare il tetto con un angolo di 35° rispetto al piano di base.
Il computer dà un'altezza di 7 metri. Il calcolo è facile; detta h l'altezza, b la base e α l'angolo risulta $\text{tg}\alpha = h/b$, da cui $h = b \times \text{tg}\alpha$.
Similmente si potrebbe misurare il diametro della Luna, nota la sua distanza e l'angolo sotto il quale appaiono gli estremi del disco. Con il Commodore 64 è anche possibile il procedimento inverso e calcolare quindi l'angolo note le misure lineari. Sotto quale angolo viene visto un regolo di un metro alla distanza di 200 km? In metri, $b = 200\,000$, $h = 1$ ... la risposta è: 0° 0′ 1.03″. I moderni astronomi riescono a misurare angoli ancora più piccoli! La cosa è stupefacente.
E ancora, possiamo conoscere la lunghezza del lato di un triangolo qualsiasi (scaleno) sapendo la misura degli altri due lati e l'angolo compreso. Si utilizza la formula seguente:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \alpha}$$

Per eseguire la mappa di un territorio, a parte i metodi aerofotogrammetrici, ci si basa sulla triangolazione. Il principio, introdotto dall'olandese Snellius nel XVII secolo, afferma che un triangolo è completamente determinato da un lato e dai due angoli adiacenti. Ciò significa che la conoscenza di questi tre elementi consente di dedurre tutti gli altri. Interroghiamo ancora il computer selezionando il tasto 3 e successivamente il tasto 1. A quale distanza si trova la casa al di là del fiume se, fissata una base di 10 metri, la si vede sotto i due angoli di 92° 0′ 0″ e 86° 30′ 0″? La risposta è 381,3 m dall'estremo A e 381,78 dall'estremo B. E se una misura angolare fosse affetta da un errore di 30′, quale sarebbe l'errore nel calcolo della distanza? Riproviamo con gli angoli di 92° e 86°; questa volta le misure danno un valore di circa 286 m; la differenza con il precedente è di quasi 100 m.
Nel nostro rapportatore mezzo grado sembra un'inezia; ci si rende conto dell'estrema precisione richiesta in questo tipo di applicazioni. Per il calcolo si ricorre al teorema dei seni. Con riferimento alla figura 4, sussiste la seguente relazione:

$$\frac{AB}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{BC}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{AC}{\text{sen } \hat{B}}$$

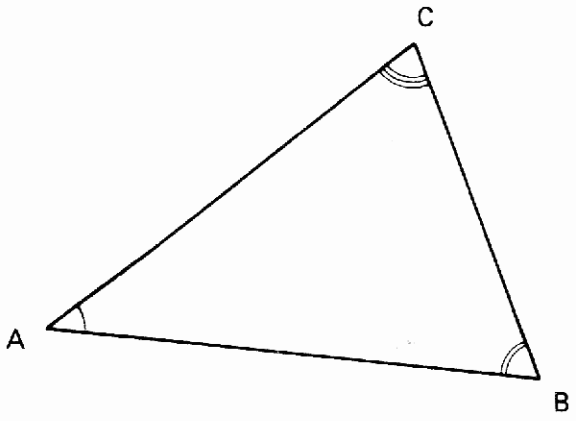


Fig. 4

Noti due angoli, è conosciuto anche il terzo poiché $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$. Se è nota la base AB, risulta:

$$BC = \frac{AB \times \text{sen } \hat{A}}{\text{sen } \hat{C}} \quad ; \quad AC = \frac{AB \times \text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \hat{C}}$$

Come ultima applicazione viene presentato un metodo distanziometrico, usato in campo topografico, detto ad angolo parallatico variabile con stadia verticale. La stadia è un'asta graduata che generalmente va

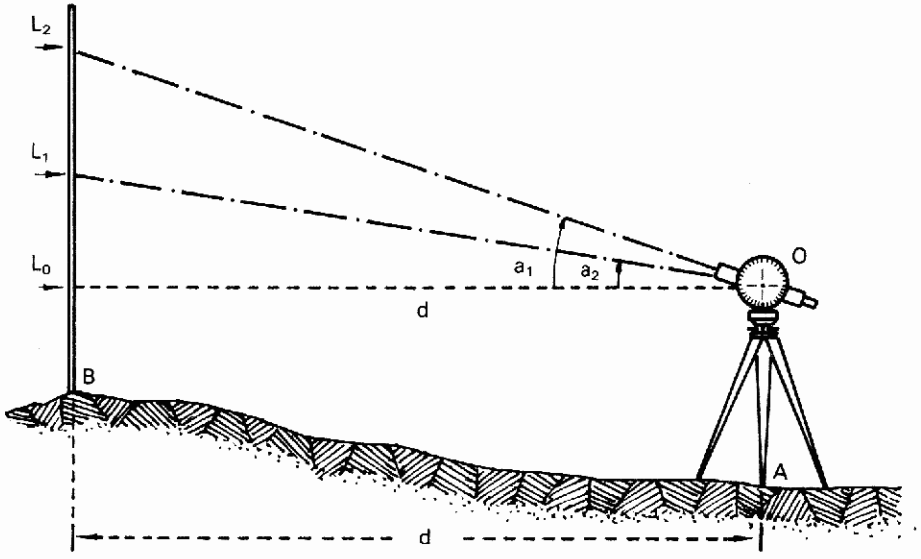


Fig. 5

posta sul punto del quale si vuole conoscere la distanza. Essa va osservata a due differenti livelli con un ecclimetro o un teodolite, strumenti provvisti di canocchiale e cerchi goniometrici (vedi fig. 5). Valgono le seguenti relazioni:

$$L_0L_1 = d \times \text{tg}\ \alpha_2 \quad ; \quad L_0L_2 = d \times \text{tg}\ \alpha_1$$

Detta L la misura di L_1L_2, risulta:

$$d = \frac{L}{\text{tg}\ \alpha_1 - \text{tg}\ \alpha_2}$$

```
1 REM       ANGOLI E DISTANZE
2 REM  ************************
5 PRINT"■":POKE52,48:POKE56,48
6 PRINTCHR$(142):PRINTTAB(9)"■■■■■■■■■■UN MOMENTO, PREGO."
10 POKE56334,PEEK(56334)AND254:POKE1,PEEK(1)AND251
20 FORI=0TO703:POKEI+12288,PEEK(I+53248):NEXT
30 POKE1,PEEK(1)OR4:POKE56334,PEEK(56334)OR1
40 POKE53272,(PEEK(53272)AND240)+12
50 FORCH=65TO88:FORBY=0TO7
60 READNU:POKE12288+8*CH+BY,NU
70 NEXTBY:NEXTCH
80 PRINTCHR$(147)
150 DATA 255,0,0,0,0,0,0,0
160 DATA 128,128,128,128,128,128,128,128
170 DATA 0,0,0,0,3,12,63,240
180 DATA 3,12,48,192,15,240,0,0
190 DATA 128,64,79,240,32,32,32,32
200 DATA 15,240,64,64,32,32,32,32
210 DATA 0,0,0,0,0,0,15,240
220 DATA 0,0,0,0,15,240,0,0
230 DATA 0,0,15,240,0,0,0,0
240 DATA 15,240,0,0,0,0,0,0
250 DATA 0,0,0,0,3,12,48,192
260 DATA 3,12,48,192,0,0,0,0
270 DATA 128,64,32,16,8,4,2,1
280 DATA 16,16,32,32,64,64,128,128
290 DATA 1,1,2,2,4,4,8,8
300 DATA 1,1,1,1,1,1,1,1
310 DATA 1,1,1,2,2,4,24,224
320 DATA 0,0,0,0,0,0,15,241
330 DATA 0,0,0,0,0,224,24,4
340 DATA 2,2,1,1,3,12,48,192
350 DATA 0,0,15,240,3,12,48,192
360 DATA 15,252,48,192,0,0,0,0
370 DATA 128,64,32,32,16,16,16,16
380 DATA 129,239,143,239,143,239,143,239
500 DEF FNG(R)=R*57.29577925
510 DEF FNR(G)=G*.0174532925
520 LC=54272
600 PRINT"■":POKE53280,6
610 PRINT"■■■■■■■■  A N G O L I    E    D I S T A N Z E"
620 PRINT"■■■■■■■■-BATTI UN TASTO QUALSIASI PER INIZIARE-"
630 GETA$:IFA$=""THEN630
800 PRINT"■"
810 PRINT"■■■■■■■■PREMI:"
820 PRINT"■1. PER LE CONVERSIONI"
830 PRINT"■2. PER LE APPLICAZIONI AI TRIANGOLI"
```

```
840 PRINT"■3. PER LA DISTANZA DI UN PUNTO"
850 PRINT"■4. FINE■■■■"
860 PRINTTAB(12)"SCELTA:";:INPUTSC
870 IFSC<1ORSC>4THEN860
880 ONSCGOTO1000,2000,3000,9000
1000 PRINT"□"TAB(7)"- CONVERSIONI ANGOLARI -■■■"
1010 PRINT"SPECIFICA L'UNITA' DI MISURA NELLA QUALE"
1020 PRINT"□E' ESPRESSO L'ANGOLO."
1030 PRINT"■1. RADIANTI"
1040 PRINT"2. GRADI DECIMALI"
1050 PRINT"3. GRADI SESSAGESIMALI■"
1060 INPUT"SCELTA:";SC
1070 IFSC<1ORSC>3THEN1060
1080 ONSCGOTO1100,1200,1300
1100 INPUT"■RADIANTI";R
1110 PRINT"■";R;"RAD =";INT(1000*FNG(R)+.5)/1000;"GRADI"
1120 A=FNG(R):GOSUB5000
1130 PRINT"■=";GR;"GRADI ";PR;"PRIMI ";SE;"SECONDI"
1140 GOSUB8000:GOTO1000
1200 INPUT"■GRADI DECIMALI";G
1210 PRINT"■";G;"GRADI =";INT(1000*FNR(G)+.5)/1000;"RADIANTI"
1220 A=G:GOSUB5000:GOTO1130
1300 GOSUB5100
1310 PRINT"■";GR;"GRADI";PR;"PRIMI E";SE;"SECONDI"
1320 PRINT"■CORRISPONDONO A:"
1330 PRINT"■";INT(1000*G+.5)/1000;"GRADI DECIMALI"
1340 PRINT"■";INT(1000*FNR(G)+.5)/1000;"RADIANTI.■"
1350 GOSUB8000:GOTO1000
2000 PRINT"□":REM TRIANGOLI
2010 PRINTTAB(5)"- APPLICAZIONI AI TRIANGOLI -"
2020 PRINT"■■PREMI:"
2030 PRINT"■1. PER I TRIANGOLI RETTANGOLI"
2040 PRINT"■2. PER I TRIANGOLI SCALENI"
2050 GETK$:IFK$=""THEN2050
2060 IFK$="1"THEN2100
2070 IFK$="2"THEN2500
2080 GOTO2050
2100 PRINT"□"
2110 FORJ=1315TO1326:POKEJ,65:POKEJ+LC,0:NEXT
2120 FORJ=1087TO1287STEP40:POKEJ,66:POKEJ+LC,0:NEXT
2130 FORJ=1085TO1275STEP38:POKEJ,75:POKEJ+1,76
2140 POKEJ+LC,0:POKEJ+1+LC,0:NEXT
2150 POKE1277,87:POKE1277+LC,0
2170 POKE1361,2:POKE1361+LC,14
2180 POKE1208,8:POKE1208+LC,14
2190 POKE1278,1:POKE1278+LC,14
2200 PRINT"■■■■■■■■■■■■(A=ANGOLO; B=BASE; H=ALTEZZA)"
2210 INPUT"■COSA VUOI TROVARE";RP$
2220 IFRP$="A"THEN2260
2230 IFRP$="B"THEN2300
2240 IFRP$="H"THEN2400
2250 GOTO2210
2260 INPUT"■BASE =";B:IFB=0THEN2260
2270 INPUT"ALTEZZA =";H:R=ATN(H/B)
2280 PRINT"■L'ANGOLO E' DI";INT(1000*FNG(R))/1000;"GRADI"
2290 GOSUB8000:GOTO2000
2300 INPUT"■ALTEZZA =";H
2310 INPUT"ANGOLO =";A:IFA<90THEN2330
2320 PRINT"L'ANGOLO DEVE MINORE DI 90 GRADI":GOTO2310
2330 B=INT(100*H/TAN(FNR(A)))/100
2340 PRINT"■LA MISURA DELLA BASE E'";B
2350 GOSUB8000:GOTO2000
2400 INPUT"■ANGOLO =";A:IFA<90THEN2420
2410 PRINT"L'ANGOLO DEVE ESSERE MINORE DI 90 GRADI":GOTO2400
2420 INPUT"BASE =";B
2430 H=INT(100*B*TAN(FNR(A))+.5)/100
```

```
2440 PRINT"■LA MISURA DELL'ALTEZZA E'";H
2450 GOSUB8000:GOTO2000
2500 PRINT"□"
2510 FORJ=1315TO1329:POKEJ,65:POKEJ+LC,0:NEXT
2520 FORJ=1125TO1289STEP41:POKEJ,77:POKEJ+LC,0:NEXT
2530 FORJ=1123TO1275STEP38:POKEJ,75:POKEJ+LC,0
2540 POKEJ+1,76:POKEJ+1+LC,0:NEXT
2550 POKE1277,87:POKE1277+LC,0
2560 POKE1313,1:POKE1313+LC,14
2570 POKE1331,2:POKE1331+LC,14
2580 POKE1085,3:POKE1085+LC,14
2590 PRINT"■■■■■■■■■■CALCOLO IL LATO BC, DATI AB,AC E"
2600 PRINT"L'ANGOLO COMPRESO.■"
2610 INPUT"LATO AB =";L1:INPUT"LATO AC =";L2
2620 INPUT"ANGOLO (GRADI DEC.) =";G
2630 L=SQR(L1*L1+L2*L2-2*L1*L2*COS(FNR(G)))
2640 PRINT"■LA MISURA DEL LATO BC E'";INT(100*L+.5)/100
2650 GOSUB8000:GOTO2000
3000 PRINT"□"
3010 PRINTTAB(7)"- DISTANZA DI UN PUNTO -"
3020 PRINT"■■■PREMI:"
3030 PRINT"■1.PER IL METODO DELLA TRIANGOLAZIONE."
3040 PRINT"■2.PER IL METODO DELL'ANGOLO PARALLATTICO"
3050 PRINT"□  VARIABILE."
3060 GETK$:IFK$=""THEN3060
3070 IFK$="1"THEN3100
3080 IFK$="2"THEN3500
3090 GOTO3060
3100 PRINT"□";TAB(10)"- TRIANGOLAZIONE -"
3110 FORJ=1275TO1395STEP40:POKEJ,80:POKEJ+LC,0:NEXT
3120 FORJ=1236TO1128STEP-36:FORK=0TO3
3130 POKEJ+K,71+K:POKEJ+K+LC,0
3140 NEXTK:NEXTJ
3150 POKE1130,85:POKE1130+LC,0
3160 POKE1131,86:POKE1131+LC,0
3170 FORJ=1169TO1397STEP38
3180 POKEJ,76:POKEJ+LC,0
3190 POKEJ-1,75:POKEJ-1+LC,0
3200 NEXTJ
3210 POKE1236,82:POKE1236+LC,0
3220 POKE1276,81:POKE1276+LC,0
3230 POKE1356,83:POKE1356+LC,0
3240 POKE1396,84:POKE1396+LC,0
3250 POKE1235,1:POKE1235+LC,14
3260 POKE1435,2:POKE1435+LC,14
3270 POKE1132,3:POKE1132+LC,14
3280 INPUT"■■■■■■■■■■■LUNGHEZZA DELLA BASE AB =";L
3290 INPUT"ANGOLO A (GRADI DEC.) =";G
3300 S=180-G:S1=SIN(FNR(G))
3310 INPUT"ANGOLO B (GRADI DEC.) =";G
3320 S=S-G:S2=SIN(FNR(G)):S3=SIN(FNR(S))
3330 PRINT"■AC =";INT(100*L*S2/S3+.5)/100
3340 PRINT"■BC =";INT(100*L*S1/S3+.5)/100
3350 GOSUB8000:GOTO3000
3500 PRINT"□   - ANGOLO PARALLATTICO VARIABILE -"
3510 FORJ=1513TO1533:POKEJ,65:POKEJ+LC,0:NEXT
3520 FORJ=1434TO1474STEP40:POKEJ,80:POKEJ+LC,0:NEXT
3530 FORJ=1131TO1491STEP40:POKEJ,88:POKEJ+LC,0:NEXT
3540 POKE1394,15:POKE1394+LC,14
3550 FORJ=1395TO1129STEP-38:FORK=0TO1
3560 POKEJ+K,75+K:POKEJ+K+LC,0
3570 NEXTK:NEXTJ
3575 PRINTTAB(29)"■1"
3580 POKE1395,67:POKE1395+LC,0
3590 POKE1396,68:POKE1396+LC,0
3600 POKE1397,69:POKE1397+LC,0
```

```
3610 POKE1398,70:POKE1398+LC,0
3620 FORJ=1359TO1287STEP-36:FORK=0TO3
3630 POKEJ+K,71+K:POKEJ+K+LC,0
3640 NEXTK:NEXTJ
3650 PRINTTAB(29)"■■■L2"
3660 FORJ=1435TO1450:POKEJ,65:POKEJ+LC,0:NEXT
3670 PRINTTAB(29)"■■■L0"
3680 POKE1483,4:POKE1483+LC,14
3690 INPUT"■■■L1-L2) = L =";L
3700 PRINT"SCRIVI I DUE ANGOLI (A1>A2)"
3710 INPUT"A1 (GRADI DEC.) =";G
3720 IFG>=90THENPRINT"□□":GOTO3710
3730 S1=TANK FNR(G))
3740 INPUT"A2 (GRADI DEC.) =";A
3750 IFA>=90THENPRINT"□□":GOTO3740
3760 IFA<GTHEN3780
3770 GOTO3500
3780 S2=TANK FNR(A))
3790 PRINT"■DISTANZA D =";INT(100*L/(S1-S2)+.5)/100
3800 GOSUB8000:GOTO3000
5000 GR=INT(A):A=(A-GR)*60
5010 PR=INT(A):A=(A-PR)*60
5020 SE=INT(A*100+.5)/100
5030 IFSE=60THENSE=0:PR=PR+1
5040 IFPR=60THENPR=0:GR=GR+1
5050 RETURN
5100 PRINT"■SCRIVI GRADI, PRIMI E SECONDI SEPARATI"
5110 PRINT"DA UNA VIRGOLA."
5120 INPUT"■(GR,PR,SE) ";GR,PR,SE
5130 G=GR+PR/60+SE/3600
5140 RETURN
8000 PRINT"■■VUOI CONTINUARE IN QUESTA SEZIONE? (Y/N)"
8010 GETK$:IFK$=""THEN8010
8020 IFK$="Y"THENRETURN
8030 IFK$="N"THEN800
8040 GOTO8010
9000 POKE53272,21:POKE53280,14:PRINT"■":END
```

La linea 5 limita l'area di memoria delle variabili Basic per riservare spazio ai caratteri definiti dall'utente. Le successive istruzioni seguono la procedura per trasferire dalla ROM alla RAM una parte del set dei caratteri e poterli così modificare in conformità alle esigenze grafiche (si veda l'appendice 2). Le istruzioni DATA (150-380) contengono appunto i valori decimali che definiscono i nuovi caratteri.

Le funzioni definite alle linee 500 e 510 consentono di trasformare le misure angolari da radianti a gradi sessagesimali e, viceversa, da gradi a radianti.

Il computer, infatti, utilizza i radianti come argomento per le proprie funzioni trigonometriche mentre, nella maggior parte delle applicazioni, risulta più agevole all'utente esprimere gli angoli in gradi.

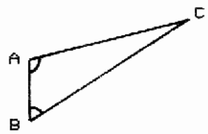
La variabile LC (linea 520) contiene il valore che, sommato alla locazione dello schermo, consente di ricavare la corrispondente locazione di memoria per il colore.

Le linee 800-880 contengono il menù con tre opzioni operative; la variabile SC accoglie la scelta dell'utente e l'istruzione ON GOTO

rinvia alle tre sezioni corrispondenti che iniziano ai numeri 1000, 2000 e 3000.
Le linee 1000-1080 contengono il sottomenù per la scelta dell'unità di misura. In ogni caso i valori dati in risposta vengono arrotondati alla terza cifra decimale moltiplicando per mille, prendendo la parte intera e poi dividendo per mille (vedi funzioni INT alle linee 1110, 1210, 1330, 1340). Le subroutine 5000 e 5100, richiamate in questa sezione, servono rispettivamente per convertire e per accettare in input le misure angolari in gradi, primi e secondi.
L'altra subroutine qui utilizzata, la 8000, contiene la richiesta per continuare nella sezione.
Le linee 2000-2080 contengono un altro sottomenù per la scelta del tipo di triangolo sul quale si vuole operare.
Nel caso di un triangolo rettangolo l'utente può scegliere il calcolo di uno dei tre elementi: A = angolo alla base, B = base e H = altezza. Alla linea 2270, R è la misura in radianti dell'angolo richiesto; la linea successiva utilizza la funzione FNG(R) per trasformare il valore in gradi che viene approssimato alla terza cifra decimale.
Alla linea 2330 viene invece calcolata la base in funzione dell'altezza e dell'angolo. Analogamente, alla linea 2430, viene calcolata l'altezza H.
La parte seguente è riservata ai triangoli scaleni e, come la precedente, si apre con un'illustrazione (linee 2510-2580) che facilita la comprensione del problema e l'introduzione dei dati. Le variabili L1 e L2 (linea 2610) contengono le misure di due lati mentre G è l'angolo tra essi compreso.
L'espressione alla linea 2630 calcola L, cioè il terzo lato del triangolo e la PRINT seguente stampa il risultato.
Anche l'ultimo sottomenù (3000-3090) presenta due scelte che trovano attuazione alle linee 3100 e 3500 del programma.
Ancora qualche ciclo FOR NEXT ed una serie di POKE per creare un disegno (linee 3110-3270) e si giunge agli input per l'applicazione del metodo della triangolazione. L è la misura della base nota (3280) e G la misura, in gradi, di ognuno dei due angoli adiacenti alla base.
Il calcolo si avvale del teorema dei seni e appunto S1, S2 ed S3 sono i valori dei seni degli angoli del triangolo (3300-3320). I risultati sono approssimati alla seconda cifra decimale. L'ultima figura è creata dalle istruzioni 3510-3680. L (input di linea 3690) rappresenta la misura dell'intervallo letto alla stadia, G e A (linee 3710 e 3740) sono i due angoli sotto i quali sono visti gli estremi dell'intervallo. Questa volta S1 e S2 rappresentano le tangenti trigonometriche degli angoli e la formula risolutiva è inserita nell'istruzione PRINT di linea 3790. Il +.5, tra parentesi potrebbe dare adito a qualche interrogativo, ma il suo unico scopo è quello di garantire un'approssimazione all'intero più

vicino e non sempre per difetto! Il listato termina con le subroutine delle quali si è già parlato. Il significato delle variabili GR, PR e SE è intuitivo; esse stanno per gradi, primi e secondi.
Alla linea 5130, G riporta il valore dell'angolo nella forma decimale tenendo conto che un primo è la sessantesima parte di grado e che un secondo è la sua tremilaseicentesima parte.
La linea 9000 ripristina il normale set di caratteri e il colore del bordo terminando il programma.
Ecco un esempio di utilizzazione.

```
          - TRIANGOLAZIONE -
```




```
LUNGHEZZA DELLA BASE AB =? 10
ANGOLO A (GRADI DEC.) =? 92.5
ANGOLO B (GRADI DEC.) =? 86.25

AC = 457.47
BC = 457.97

VUOI CONTINUARE IN QUESTA SEZIONE? (Y/N)



SCRIVI GLI ESTREMI DELL'INTERVALLO DI
INTEGRAZIONE. (X1<X2)

X1=? 0
X2=? 2

CRIVI IN QUANTE PARTI VUOI SUDDIVEDERE
L'INTERVALLO. (N=NUMERO PARI)
N =? 10
```

$$\int_{0}^{2} F(X) = 2.66666667$$

```
         VUOI CONTINUARE? (Y/N)
```

Esercizio 2-2
Scrivere un breve programma per il calcolo della distanza di una persona, nota la sua altezza apparente, misurata con una riga graduata posta a un metro dall'osservatore.

CAPITOLO TRE

Rappresentazioni grafiche

I programmi che seguono sono strettamente legati alla grafica ed è proprio questo il campo in cui, nei vari computer, si notano gli elementi forse di maggior divario.
Prima di affrontare il capitolo, per una maggiore comprensione delle tecniche di programmazione, è consigliabile conoscere da vicino le caratteristiche grafiche del Commodore 64, come indirizzare i caratteri sullo schermo, creare dei caratteri personalizzati o figure in movimento e come ottenere la grafica ad alta risoluzione.
Poiché gli argomenti, pur essendo parte integrante dei programmi, sono marginali rispetto alla trattazione matematica, sono stati inseriti a parte nelle appendici. Nel testo, per evitare inutili ripetizioni, si daranno per scontate le considerazioni lì riportate.

GRAFICI A STRISCE

Questo programma permette di memorizzare dati consistenti ognuno in un elemento descrittivo e un corrispondente valore numerico. Potrebbero essere, per esempio, nomi di monti e rispettive altezze, anni e popolazione censita, nazioni e corrispondenti superfici in km^2, nomi degli studenti di una classe e il loro peso, giorni del mese e temperature, ecc..
La tabella ottenuta in un primo tempo può essere successivamente ordinata o in ordine alfabetico o secondo le misure crescenti. I dati vengono poi rappresentati con un diagramma a strisce (ortogramma) che viene dimensionato automaticamente. In base alla misura massima

introdotta, il programma suddivide l'asse verticale in un certo numero di parti e, accanto, stampa i valori multipli di una opportuna unità di misura. Per esempio, se la massima misura è 36, l'asse verticale viene diviso in cinque parti accompagnate dai valori 10, 20, 30, 40 e 50; se il massimo valore introdotto è, per esempio, 860, sull'asse appaiono le misure 200, 400, 600, 800, 1000. Se infine, il massimo valore supera 9999 allora tutte le misure vengono divise per 1000. Infatti, introducendo il valore 14000, appare la scritta "(PER 1000)" e sull'asse appaiono le misure 5, 10, 15, 20, 25.

Il dimensionamento automatico non è cosa difficile da ottenersi, ma un'adeguata notazione scritta delle grandezze è una caratteristica meno comune e certamente utile per una corretta lettura del grafico. Per ottenere le strisce che formano il diagramma si sono utilizzati i caratteri grafici del Commodore 64. Il modo più semplice sarebbe stato quello di stampare una sequenza di spazi in *reverse* (il carattere in *reverse* si ottiene sommando 128 al codice carattere) tuttavia, poiché ogni carattere occupa una matrice di 8 = 8 pixel, non si sarebbe utilizzata al massimo la risoluzione grafica del computer e misure non molto diverse tra di loro sarebbero state rappresentate con strisce della medesima lunghezza. Invece, utilizzando i caratteri Commodore, si può stampare una sequenza di spazi in *reverse* e terminare la colonnina con un carattere alto 1, 2, 3, ... 7 pixel in modo da ottenere la lunghezza desiderata con la massima risoluzione. Per questo bisogna utilizzare alcuni caratteri in modo normale e altri in *reverse*. I loro numeri di codice, da inserire nelle POKE, sono nell'ordine 100, 111, 121, 98, 248, 247, 227 e infine, per il carattere "pieno", 160.

Dopo la stampa del diagramma, se si desidera, viene calcolata la media aritmetica; il suo valore è dato sia in forma numerica sia in forma grafica, con una striscia orizzontale sul diagramma stesso.

```
10 REM *** ORTOGRAMMI ***
20 PRINT"■":POKE53280,6
30 DIMA$(30,2),X(30),B$(30)
40 PRINT"■■■■■■■■■■■■■■■■"
50 PRINTTAB(10)"┌──────────────────┐"
60 PRINTTAB(10)"|"SPC(16)"|"
70 PRINTTAB(10)"|    ORTOGRAMMI    |"
80 PRINTTAB(10)"|"SPC(16)"|"
90 PRINTTAB(10)"└──────────────────┘"
100 PRINT"■■■■■■■     - PER INIZIARE PREMI UN TASTO -"
110 GETK$:IFK$=""THEN110
120 PRINT"■QUANTI SONO GLI ELEMENTI DA INSERIRE?"
130 INPUT"(AL MASSIMO 30) N =";N
140 IFN>0ANDN<31THEN160
150 PRINT"VALORE NON AMMESSO, RIPETI.":GOTO130
160 PRINT"■PER OGNI ELEMENTO SCRIVI LA DESCRIZIONE"
170 PRINT"E LA MISURA CORRISPONDENTE SEPARATI DA"
180 PRINT"UNA VIRGOLA."
190 PRINT"■  N.  DESCRIZIONE,MISURA"
200 PRINT"──────────────────────────────"
```

```
210 S=0:MX=0
220 FORJ=1TON:PRINTTAB(3-LEN(STR$(J)))J;
230 INPUTA$(J,1),A$(J,2):IFLEN(A$(J,1))>18THENA$(J,1)=LEFT$(A$(J,1),18)
240 M=VAL(A$(J,2)):S=S+M:IFM>MXTHENMX=M
250 NEXTJ:VM=S/N:GOSUB600
260 PRINT"██████████"
270 PRINTTAB(6)"PREMI:"
280 PRINTTAB(6)"█1. PER LA TABELLA DEI DATI"
290 PRINTTAB(6)"█2. PER ORDINARE I DATI"
300 PRINTTAB(6)"█3. PER IL DIAGRAMMA"
310 PRINTTAB(6)"█4. PER FINIRE."
320 GETK$:IFK$=""THEN320
330 JU=ASC(K$)-48:IFJU<1ORJU>4THEN320
340 ONJUGOTO1000,2000,3000,4000
500 PRINT"█      PREMI UN TASTO PER CONTINUARE"
510 GETK$:IFK$=""THEN510
520 RETURN
600 FORJ=1TON:Y=VAL(A$(J,2))
610 Y1=INT(Y):Y2=Y-Y1:A$(J,2)=STR$(Y1)
620 IFLEN(STR$(Y1))=8THEN650
630 IFLEN(STR$(Y1))>8THENA$(J,2)="********.***":GOTO690
640 FORK=1TO8-LEN(STR$(Y1)):A$(J,2)=CHR$(32)+A$(J,2):NEXT
650 IFY2=0THENA$(J,2)=A$(J,2)+"    ":GOTO700
660 A$(J,2)=A$(J,2)+RIGHT$(STR$(Y2),LEN(STR$(Y2))-1)
670 IFLEN(A$(J,2))=11THEN700
680 IFLEN(A$(J,2))>11THENA$(J,2)=LEFT$(A$(J,2),11):GOTO700
690 FORK=1TO11-LEN(A$(J,2)):A$(J,2)=A$(J,2)+CHR$(32):NEXTK
700 NEXTJ:RETURN
1000 PRINT"█        *** TABELLA DEI DATI ***█"
1010 FORJ=1TON:PRINTTAB(3-LEN(STR$(J)))J;
1020 PRINTTAB(5)A$(J,1);
1030 FORK=1TO31-LEN(A$(J,1))-LEN(A$(J,2)):PRINT".";:NEXT
1040 PRINTA$(J,2)
1050 IFJ/20<>INT(J/20)THEN1070
1060 GOSUB500:PRINT"█(SEGUE:)█"
1070 NEXTJ:IFN=20THEN260
1080 GOSUB500:GOTO260
2000 PRINT"█"TAB(8)"*** ORDINAMENTO ***██"
2010 PRINT"SCEGLI IL TIPO DI ORDINAMENTO.█"
2020 PRINT"█1. IN ORDINE ALFABETICO."
2030 PRINT"█2. SECONDO LE MISURE CRESCENTI."
2040 GETK$:IFK$=""THEN2040
2050 IFK$<>"1"ANDK$<>"2"THEN2040
2060 W=VAL(K$):PRINTTAB(10)"███UN MOMENTO, PREGO."
2070 FORJ=1TON:B$(J)=A$(J,W):NEXT
2080 GOSUB2100:GOTO2200
2100 FORJ=1TON:P=1:FORI=1TON
2110 IFB$(J)>B$(I)THENP=P+1
2120 IFB$(J)=B$(I)ANDJ>ITHENP=P+1
2130 NEXTI:X(P)=J
2140 NEXTJ:RETURN
2200 PRINT"█        *** TABELLA ORDINATA ***█"
2210 FORJ=1TON:PRINTTAB(3-LEN(STR$(J)))J;
2220 PRINTTAB(5)A$(X(J),1);
2230 FORK=1TO31-LEN(A$(X(J),1))-LEN(A$(X(J),2)):PRINT".";:NEXT
2240 PRINTA$(X(J),2)
2250 IFJ/20<>INT(J/20)THEN2270
2260 GOSUB500:PRINT"█(SEGUE:)█"
2270 NEXTJ:IFN=20THEN260
2280 GOSUB500:GOTO260
3000 PRINT"█";:LC=54272:NI=0
3010 FORJ=1070TO1101:POKEJ,100:POKEJ+LC,14:NEXT
3020 FORJ=1109TO1869STEP40:POKEJ,80:POKEJ+LC,14:NEXT
3030 FORJ=1909TO1941:POKEJ,120:POKEJ+LC,14:NEXT
3040 FORJ=1142TO1902STEP40:POKEJ,101:POKEJ+LC,14:NEXT
3050 FORJ=1190TO1830STEP80:FORI=0TO31
```

```
3060 POKEJ+I,99:POKEJ+I+LC,14
3070 NEXTI:NEXTJ
3080 MM=MX:PX=1
3090 IFMM<9999THEN3110
3100 MM=MM/1000:PX=PX*1000:GOTO3090
3110 IFMM>1THEN3130
3120 MM=MM*1000:PX=PX/1000:GOTO3110
3130 U=MM/20:E=1:IFPX=1THENPRINT:GOTO3140
3135 PRINT" (PER";STR$(PX);")"
3140 IFU<.125*ETHEN3180
3150 IFU<.25*ETHEN3220
3160 IFU<.5*ETHEN3260
3170 E=E*10:GOTO3140
3180 Y$=STR$(2.5*E):PRINT"■"TAB(5-LEN(Y$))Y$
3190 FORJ=2TO0STEP-.5:Y$=STR$(J*E)
3200 PRINT"■■■"TAB(5-LEN(Y$))Y$
3210 NEXTJ:CF=.125*E:GOTO3300
3220 Y$=STR$(5*E):PRINT"■"TAB(5-LEN(Y$))Y$
3230 FORJ=4TO0STEP-1:Y$=STR$(J*E)
3240 PRINT"■■■"TAB(5-LEN(Y$))Y$
3250 NEXTJ:CF=.25*E:GOTO3300
3260 Y$=STR$(10*E):IFLEN(Y$)>5THENPRINT"■":GOTO3270
3265 PRINT"■"TAB(5-LEN(Y$))Y$:END
3270 FORJ=8TO0STEP-2:Y$=STR$(J*E)
3280 PRINT"■■■"TAB(5-LEN(Y$))Y$
3290 NEXTJ:CF=.5*E
3300 IFN<16THENFF=N:GOTO3320
3310 FF=15
3320 FORJ=1TOFF:YR=INT(VAL(A$(J+NI,2))/(CF*PX))
3330 IFYR=0THENLS=1909+J*2:GOTO3350
3340 FORY=1TOYR:LS=1909+J*2-Y*40:POKELS,160:POKELS+LC,7:NEXT
3350 DY=VAL(A$(J+NI,2))/(CF*PX)-YR
3360 OT=INT(8*DY):IFOT=0THEN3460
3370 IFOT=1THENNC=100:GOTO3450
3380 IFOT=2THENNC=111:GOTO3450
3390 IFOT=3THENNC=121:GOTO3450
3400 IFOT=4THENNC=98:GOTO3450
3410 IFOT=5THENNC=248:GOTO3450
3420 IFOT=6THENNC=247:GOTO3450
3430 IFOT=7THENNC=227:GOTO3450
3440 NC=160
3450 POKELS-40,NC:POKELS-40+LC,7
3460 NEXTJ:GOSUB3800:GOSUB500
3470 IFN<160RNI=15THEN260
3480 NI=15:PRINT"■";:GOTO3010
3800 PRINTTAB(6)"VUOI IL VALORE MEDIO? (Y/N)"
3810 GETK$:IFK$=""THEN3810
3820 IFK$="Y"THEN3850
3830 IFK$="N"THEN3940
3840 GOTO3810
3850 REM TRACCIA IL VALORE MEDIO
3860 RM=INT(VM/(CF*PX)):LS=1909-RM*40
3870 MD$=" VALORE MEDIO ="+STR$(VM)
3880 FORJ=1TO32-LEN(MD$):MD$=MD$+CHR$(32):NEXT
3890 FORJ=1TO32:AS=ASC(MID$(MD$,J,1))
3900 IFAS>64THENNC=AS+64:GOTO3920
3910 NC=AS+128
3920 POKELS+J,NC:POKELS+J+LC,14
3930 NEXTJ
3940 FORJ=1946TO1982:POKEJ,32:NEXT
3950 PRINT"■■■":RETURN
4000 PRINT"■":POKE53280,14:END
```

La linea 20 modifica il colore del bordo; successivamente vengono dimensionate tre matrici: A$ è destinata ad accogliere i dati da rappresentare graficamente, X e B$ sono matrici di lavoro utilizzate nel corso del programma per l'ordinamento dei dati. Il metodo di sort utilizzato è denominato "ordinamento a indici" e X( ) è destinata appunto ad accogliere gli indici della matrice A$ ordinata.
Dal titolo (linee 40-110) si passa all'inserimento dei dati (120-250). N è il numero di elementi (al massimo 30), S è la somma di tutte le misure indicate (linea 210) e MX è la massima misura indicata. Alla linea 250 viene calcolato il valore medio VM dividendo la somma delle misure per il loro numero.
Segue il menù (linee 260-340) con tre opzioni operative.
La subroutine 500-520 manda un messaggio che verrà utilizzato più volte nel corso del programma. Maggiore importanza riveste l'altra subroutine alle linee 600-700. In questo programma gli elementi da rappresentare sono costituiti da una descrizione e da una misura, entrambe inserite nella matrice bidimensionale A$. Un'unica routine ordina sia le descrizioni sia le misure. È evidente che, trattando queste ultime come stringhe, debbano sorgere dei problemi. Per esempio, la stringa 92 è maggiore della stringa 1240 poiché la prima inizia con un 9 mentre la seconda inizia con un 1. Trasformando le stringhe in numeri con la funzione VAL si sarebbe dovuto utilizzare un'altra routine di ordinamento. Qui si è invece adottato il metodo di operare sulle stringhe contenenti le misure in modo da riportare il punto decimale sempre nella stessa posizione all'interno della stringa.
Mancando il PRINT USING, nel Basic del Commodore 64, la subroutine 600 risulta così utile anche per la successiva tabulazione dei dati. La sezione 1000-1080 mostra gli elementi di tabella nell'ordine in cui sono stati inseriti. La particolare PRINT TAB alla linea 1010 serve a giustificare il margine destro dei numeri progressivi. Il ciclo 1030 traccia una serie di punti tra la descrizione e la corrispondente misura che viene stampata alla linea di programma successiva (1040) in modo tale da risultare incolonnata con riferimento al punto decimale.
L'istruzione 1050 fa in modo che non vengano stampati più di 20 dati alla volta per rendere più agevole la lettura. La sezione 2000-2280 presenta i dati tabulati e ordinati o in ordine alfabetico e secondo le misure crescenti. La subroutine di ordinamento è inserita alle linee 2100-2140.
Alla linea 3000 inizia la sezione per la rappresentazione grafica. La variabile LC è il numero 54272 che sommato a una locazione video porta al corrispondente indirizzo per la memoria del colore; N1 è una variabile di controllo per la rappresentazione grafica, assume il valore 0 per i primi 15 dati e 15 per i successivi.
Innanzitutto vengono stampati gli assi di riferimento (linee 3010-3070)

poi viene effettuato il dimensionamento automatico che prevede la scelta della scala e degli intervalli più opportuni in base al massimo valore da rappresentare. Sono previste 3 scale e loro multipli: 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, oppure 0, 1, 2, 3, 4, 5, oppure ancora 0, 2, 4, 6, 8, 10. Se il massimo valore supera il 9999 tutte le misure vengono divise per mille ed è fatta comparire la scritta (PER 1000).
In molti programmi l'unità di misura si ottiene dividendo semplicemente il valore massimo per il numero di righe disponibili. Qui si è voluto che il segmento unitario assumesse solo valori ben precisi, multipli di altri presi come base.
Dal valore unitario U, calcolato in prima approssimazione (linea 3130) si ricavano i coefficienti CF e PX il prodotto dei quali è l'unità di misura adottata.
Il ciclo per la stampa del grafico inizia alla riga 3320. YR indica il numero di caratteri "interi" da stampare uno sull'altro per ottenere una striscia (ciclo FOR NEXT di riga 3340); LX indica l'indirizzo di memoria della locazione dello schermo dove dev'essere stampato il carattere.
Per aumentare la precisione della rappresentazione grafica, dopo aver stampato una serie di caratteri "interi", si colloca su di essi un opportuno carattere "frazionario", alto cioè 1, 2, 3 ... 7 pixel, ricorrendo ai normali caratteri grafici, alcuni dei quali in *reverse* (routine 3350-3450).
Le ultime linee (3800-3950) contengono la subroutine per la stampa grafo-numerica del valore medio; RM è la riga sulla quale deve essere stampato il valore medio, LS è invece la locazione della memoria dello schermo corrispondente al primo carattere della riga stessa.
L'istruzione 3900 si rende necessaria perché la scritta riportante il valore medio viene stampata ricorrendo alle POKE e con questa i numeri di codice dei caratteri coincidono con i codici ASCII solo per quanto riguarda le cifre ma non per le lettere. Quindi la frase viene scandita lettera per lettera e per ogni carattere si ricava il numero di codice ASCII con la funzione ASC; se questo è superiore a 64 nella POKE si inserisce lo stesso numero diminuito di 64 altrimenti lo si riporta senza alterarlo.

DIAGRAMMI A SETTORI

Dopo i diagrammi a strisce una delle rappresentazioni grafiche più comuni è certamente quella per settori circolari. Essa è particolarmente indicata quando si debbano rappresentare valori percentuali. Esempi comuni sono le illustrazioni dei risultati elettorali, dell'impiego della popolazione nelle varie attività, delle quote di mercato conquistate da

alcune società di un determinato settore produttivo, delle quantità relative di carboidrati, protidi e lipidi negli alimenti, ecc.
In questi grafici l'intera superficie del cerchio corrisponde al 100 per cento mentre ogni quantità viene rappresentata da un settore con superficie ad essa proporzionale.
Da un punto di vista matematico la loro realizzazione non presenta difficoltà. L'1 per cento corrisponde ad un angolo di 3.6 gradi e con una semplice operazione chiunque può calcolare l'ampiezza di un settore corrispondente ad un altro qualsiasi valore.
È sorprendente tuttavia come la soluzione del problema al computer richieda conoscenze ben più profonde e come sia necessario utilizzare funzioni trigonometriche e analitiche, tanto più quanto la versione di Basic utilizzata non dispone di istruzioni grafiche. In tal caso le prime difficoltà sorgono fin da quando si deve tracciare la circonferenza. Per essa vale la seguente relazione:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

dove x_0 e y_0 sono le coordinate del centro, x e y le coordinate di un punto generico della circonferenza e r il raggio. Esplicitando rispetto alla y si ottiene:

$$y = y_0 \pm \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$$

Questa espressione, in particolare, permette il calcolo delle ordinate dei punti che formano la circonferenza al variare delle loro ascisse.
Per tracciare i lati dei settori, poi, è necessario innanzitutto ricavare l'angolo al centro a essi corrispondente, ricordandosi di esprimerlo in radianti come richiedono le funzioni trigonometriche del Basic. Poi, trattandosi di segmenti di rette, si devono calcolare le ascisse degli estremi (in pixel) e l'inclinazione. Ovviamente un estremo coincide sempre con il centro e per esso è $x_1 = x_0$, mentre l'ascissa del secondo estremo, quello appartenente alla circonferenza, è data dalla seguente relazione:

$$x_2 = \cos(\alpha) \times r$$

(si veda la figura 6).
Nel programma si è usato un ciclo che, per ogni valore di X variabile da X_1 a X_2, calcola il corrispondente valore di Y e, tramite una subroutine in grado di porre in ON un punto nella *bit map*, visualizza sullo schermo i punti di dette coordinate.
L'espressione analitica della retta, con riferimento al centro della circonferenza è: $y = \text{tg}\alpha \times x$

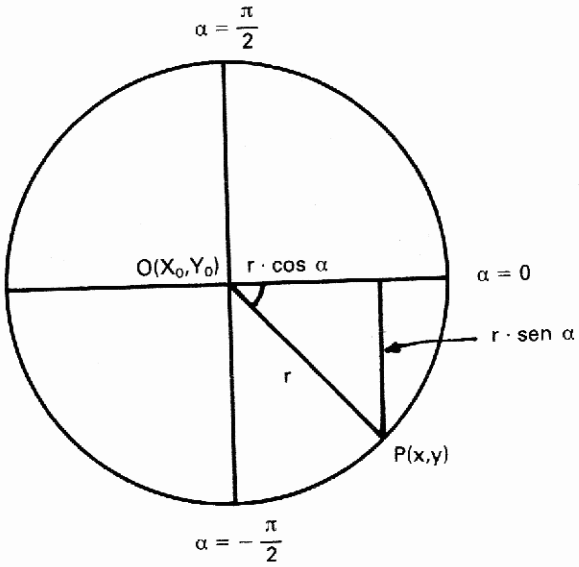


Fig. 6

e passando alle coordinate hardware si ricava:

$$y = y_0 - \mathrm{tg}(\alpha) \times x$$

Costituisce un'eccezione il calcolo di y per $\alpha = -\pi/2$; per tale misura angolare, infatti, la tangente trigonometrica vale $-\infty$ e il computer non può calcolarla. In tal caso tuttavia il problema risulta addirittura semplificato poiché il segmento da tracciare è verticale e i punti che lo formano hanno la stessa ascissa $X = X_1 = X_2 = X_0$ e ordinate variabili da Y_0 a $Y_0 + r$.

```
10 REM  DIAGRAMMI A SETTORI
20 REM  ********************
30 POKE53280,6
40 PRINT"■■■■■"
50 PRINT"        ┌──────────────────────────┐"
60 PRINT"        │    DIAGRAMMI A SETTORI   │"
70 PRINT"        └──────────────────────────┘"
80 PRINT"        │"SPC(25)"│"
90 PRINT"        │    1. INSERIMENTO DATI   │"
100 PRINT"       │"SPC(25)"│"
110 PRINT"       │    2. DIAGRAMMA          │"
120 PRINT"       │"SPC(25)"│"
130 PRINT"       │    3. FINE               │"
140 PRINT"       │"SPC(25)"│"
150 PRINT"       └──────────────────────────┘"
160 GETK$:IFK$=""THEN160
170 IFK$="1"THEN1000
180 IFK$="2"THEN1500
190 IFK$="3"THEN3000
200 GOTO160
1000 INPUT"■■QUANTI SONO I DATI? ";N
```

```
1010 IFNK=10THEN1035
1020 PRINT"■SPIACENTE, NON PIU' DI 10. RIPETI."
1030 FORT=1TO3000:NEXT:GOTO1000
1035 IFNK<2THENPRINT"■ALMENO DUE DATI, PREGO.":GOTO1030
1040 PRINT"■PER OGNI DATO SCRIVI LA DESCRIZIONE E"
1050 PRINT"LA QUANTITA'."
1060 PRINT"■■  N.    DESCRIZIONE      QUANTITA'"
1070 PRINT"──────────────────────────────────────"
1080 FORJ=1TON:PRINTTAB(3-LEN(STR$(J)));STR$(J);")":E$(J,2)="00000000":NEXTJ
1090 PRINT"──────────────────────────────────────"
1100 SS=0:FORJ=1TOM:NR=J+6:NC=8:LU=12:GOSUB5000:E$(J,1)=X$
1105 FORW=1TOS:LO=982+NR*40+24+W:POKELO,ASC(MID$(E$(J,2),W,1))
1106 POKELO+54272,14:NEXTW
1110 NC=24:LU=8:GOSUB5000:IFVAL(X$)<=0THEN1110
1120 E$(J,2)=X$:SS=SS+VAL(X$):NEXTJ
1130 PRINTTAB(10)"■- CONFERMI?(Y/N) -"
1140 GETK$:IFK$=""THEN1140
1150 IFK$="Y"THENDE$="ON":GOTO40
1160 IFK$="N"THENPRINT"□                                        □□":GOTO1100
1170 GOTO1140
1500 IFDE$="ON"THEN2000
1510 PRINT"■■■■■■■■■■ATTENZIONE! NON E' PRESENTE ALCUN DATO."
1520 PRINT"■■■■■■■    <PREMI UN TASTO PER CONTINUARE>"
1530 GETK$:IFK$=""THEN1530
1540 GOTO40
2000 PRINT"■"
2010 POKE53272,PEEK(53272)OR8
2020 FORI=8192TO16191:POKEI,0:NEXT
2030 FORI=1024TO2023:POKEI,6:NEXT
2040 POKE53265,PEEK(53265)OR32
2050 GOSUB5500:X=79:A=π/2:D=π/2+VAL(E$(1,2))*100/SS*3.6*π/360
2060 FORY=55TO99:GOSUB5200:NEXT
2070 FORJ=1TON:P=VAL(E$(J,2))*100/SS:R=P*3.6*π/180:A=A-R:D=A+R/2:IFJ=NTHEN2130
2080 IFCOS(A)>0THENX1=79:X2=79+COS(A)*50:Y1=99:GOTO2100
2090 X1=79+COS(A)*50:X2=79:IFA=-π/2THENY1=99:GOTO2100
2095 Y1=INT(99-(TAN(A)*(X1-79)*.9))
2100 FORX=X1TOX2:IFA=-π/2THENY2=144:GOTO2110
2105 Y2=INT(99-(TAN(A)*(X-79)*.9))
2110 DY=Y2-Y1:IFABS(DY)>1THENY=Y1+SGN(DY):GOSUB5200:Y1=Y:GOTO2110
2120 Y=Y2:GOSUB5200:Y1=Y2:NEXTX
2130 XW=INT(79+COS(D)*60):YW=INT(99-SIN(D)*60)
2140 S$=CHR$(J+64):RI=INT(YW/8):CO=INT(XW/8)-1:GOSUB5300
2150 S$=CHR$(J+64)+CHR$(32)+E$(J,1):IFP<10THENS$=S$+CHR$(32)
2155 P=INT(10*P)/10:S$=S$+STR$(P):IFP=INT(P)THENS$=S$+"  "
2156 S$=S$+CHR$(37)
2160 RI=6+J:CO=19:GOSUB5300
2170 NEXTJ
2180 S$="<PREMI UN TASTO PER CONTINUARE>":RI=24:CO=4:GOSUB5300
2190 GETK$:IFK$=""THEN2190
2200 POKE53265,PEEK(53265)AND223
2210 POKE53272,21:GOTO40
3000 POKE53280,14:PRINT"■":END
5000 PL=983+NR*40+NC:UL=PL+LU-1:LO=PL
5010 C=PEEK(LO)+128:POKELO,C:POKELO+54272,14
5020 GETK$:IFK$=""THEN5020
5030 IFK$=CHR$(29)THEN5100
5040 IFK$=CHR$(157)THEN5110
5050 IFK$=CHR$(13)THEN5120
5060 C=ASC(K$):IFC<65THENC=C+64
5070 POKELO,C-64:POKELO+54272,14
5080 IFLO<ULTHENLO=LO+1
5090 GOTO5010
5100 POKELO,C-128:IFLO<ULTHENLO=LO+1:GOTO5010
5110 POKELO,C-128:IFLO>PLTHENLO=LO-1:GOTO5010
5120 POKELO,C-128:X$=""
5130 FORW=PLTOUL:C=PEEK(W):IFC<32THENC=C+64
```

```
5140 X$=X$+CHR$(C):NEXT:RETURN
5200 CH=INT(X/8):RO=INT(Y/8)
5210 LN=YAND7:BY=8192+RO*320+8*CH+LN
5220 BI=7-(XAND7):POKEBY,PEEK(BY)OR(2↑BI)
5230 RETURN
5300 POKE56334,PEEK(56334)AND254:POKE1,PEEK(1)AND251
5310 FORCH=1TOLEN(S$):NL=ASC(MID$(S$,CH,1))
5320 IFNL>64THENNL=NL-64
5330 FORLN=0TO7:LS=8192+R1*320+8*(CH+CO)+LN:BY=NL*8+LN+53248
5340 POKELS,PEEK(BY):NEXTLN:NEXTCH
5350 POKE1,PEEK(1)OR4:POKE56334,PEEK(56334)OR1
5360 RETURN
5500 X=30:Y=99:GOSUB5200:Y1=99
5510 FORX=30TO129:Y2=INT(99-(SQR(ABS(2500-(80-X)↑2))*.9))
5520 DY=Y2-Y1:IFABS(DY)>1THENY=Y1+SGN(DY):GOSUB5200:Y1=Y:GOTO5520
5530 Y=Y2:GOSUB5200:Y1=Y2:NEXT
5540 FORX=129TO30STEP-1:Y2=INT(99+(SQR(ABS(2500-(80-X)↑2))*.9))
5550 DY=Y2-Y1:IFABS(DY)>1THENY=Y1+SGN(DY):GOSUB5200:Y1=Y:GOTO5550
5560 Y=Y2:GOSUB5200:Y1=Y2:NEXT
5570 RETURN
```

Il programma inizia con il titolo e il menù (linee 10-200) nell'ambito del quale la scelta dell'utente viene fatta con l'istruzione GET di linea 160.

Sono presenti due sole sezioni, a iniziare dalle linee 1000 e 2000, rispettivamente per la scrittura dei dati e per la loro rappresentazione grafica.

Alla linea 1000 viene accettato il numero totale di dati (variabile N); esso è stato limitato a 10 ma nulla vieta di dimensionare la matrice e modificare l'istruzione 1010 posta a protezione. È bene tuttavia tener presente che un diagramma con più di 10 settori probabilmente risulterà poco leggibile e soprattutto in esso potranno sovrapporsi le lettere poste come riferimento in corrispondenza di ogni settore.

Ogni dato, raccolto nella matrice E$( ), comprende due elementi, uno descrittivo e l'altro numerico. Quest'ultimo, memorizzato come stringa, verrà successivamente convertito in numero con la funzione VAL.

Le linee 1040-1090 predispongono lo schermo per la scrittura dei dati e inizializzano a zero il secondo elemento della matrice E$ contenente il campo numerico.

L'inserimento dei dati avviene con il ciclo FOR NEXT alle linee 1100-1120 e si avvale della subroutine 5000 che funziona come *data entry*. A differenza di quanto si ottiene con le istruzioni INPUT, in questo modo si possono accettare stringhe di una determinata lunghezza e da una ben precisa posizione del video.

Prima di accedere alla subroutine bisogna specificare il numero di riga NR e il numero di colonna NC per la posizione e la variabile LU per la lunghezza della stringa.

Alle linee 1100 e 1120 la stringa X$, accettata con la subroutine 5000, viene trasferita nella matrice E$( ) mentre SS memorizza il

totale delle quantità indicate dall'utente, per poter in seguito ricavare i valori percentuali.
Prima di passare alla rappresentazione grafica le linee 1130-1170 chiedono una conferma di quanto è stato scritto e permettono il ritorno al ciclo 1100 con il quale, questa volta, senza dover riscrivere tutto daccapo, si potranno modificare solo i dati che devono essere corretti. Se la conferma è positiva viene posta uguale a "ON" la variabile *flag* DE$ per indicare che i dati sono stati inseriti, in modo che dal menù non si possa accedere alla sezione grafica del programma in assenza di quantità rappresentabili. Tale controllo, in effetti, avviene alle linee 1500-1540 dove eventualmente viene dato un messaggio d'errore.
Le prime istruzioni della sezione grafica (linee 2000-2040) predispongono il computer nel modo ad alta risoluzione in *bit map*. L'operazione richiede un certo tempo. Parimenti tutto lo svolgimento successivo potrà apparire alquanto lento ma è quanto ci si deve aspettare usando una versione di Basic in cui non sono implementate le funzioni grafiche.
La subroutine 5500, chiamata dalla linea 2050, traccia un cerchio nella parte sinistra dello schermo; A e D sono valori angolari, in radianti, che indicano le direzioni dalle quali iniziare la suddivisione del cerchio in settori e l'inserimento delle lettere di riferimento all'esterno del cerchio. Il ciclo 2060 traccia il raggio che costituirà il primo lato del primo settore; la subroutine 5200 traccia di volta in volta un punto in alta risoluzione. Alle linee successive inizia il ciclo principale di lavoro che si ripete per gli N dati da rappresentare. La variabile P contiene la percentuale, R è l'angolo del corrispondente settore; R viene sempre sottratto al precedente valore di A in quanto la rappresentazione si svolge qui in senso orario mentre, in trigonometria, la circonferenza è orientata in senso antiorario. Inoltre, sempre alla linea 2070, l'istruzione IF THEN fa in modo che non venga segnato il lato dell'ultimo settore che, ovviamente, coincide con il primo.
Alle linee 2080-2095 si provvede a tracciare il raggio che delimita ogni settore; X1 e X2 sono le ascisse dei punti estremi del raggio (X1 < X2), Y1 è l'ordinata del punto iniziale. Sono state poste istruzioni di controllo per impedire condizioni d'errore qualora l'argomento della funzione trigonometrica TAN fosse uguale a $-\pi/2$. Il ciclo interno 2100-2120 traccia il lato di un settore colmando eventuali vuoti che si possono verificare quando le ordinate di due punti successivi differiscono per più di una unità (variabile DY). Visualizzato il settore, in sua corrispondenza, viene stampato, come riferimento, il carattere individuato alla linea 2140 e contenuto nella variabile di lavoro S$. La sua posizione viene calcolata prima in pixel, con le variabili XW e YW e successivamente in numero di riga e colonna con le variabili RI e CO. Lavorando in *bit map* non è possibile scrivere un carattere con

l'istruzione PRINT; d'altra parte non è possibile nemmeno usare una semplice POKE in quanto le locazioni 1024-2023 non vengono più utilizzate per la mappa di memoria del video, bensì per la memoria del colore. Allo scopo si utilizza la subroutine 5300 la quale copia i byte direttamente dal generatore dei caratteri posto nella ROM e li trasferisce nella *bit map* con un procedimento simile a quello utilizzato per creare un set di caratteri personalizzato. Le linee 2150-2160 trascrivono nella parte destra dello schermo i dati presenti in tabella e il loro valore percentuale. Terminata l'esecuzione del grafico (linea 2190) alla pressione di un tasto il programma ritorna al menù principale non senza aver ripristinato il contenuto dei registri per uscire dal modo *bit map* e rientrare nel modo testo (linee 2200-2210).

L'ultima parte del listato contiene le subroutine. La prima, alle righe 5000-5140, ha funzione di *data entry*. Per l'*editing* sono abilitati solo il cursore a destra, CHR$(29), e il cursore a sinistra, CHRÅ(157). Non sono valide le funzioni INST e DEL. In pratica viene visualizzato il contenuto di ogni tasto premuto spostando di volta in volta la stampa alla locazione successiva, senza tuttavia superare i limiti imposti dalla lunghezza LU. Premuto il tasto RETURN, CHR$(13), il breve ciclo 5130 legge (PEEK) i caratteri direttamente dalla mappa di memoria del videò e crea la stringa X$ che è identica a quella presente sullo schermo.

La subroutine 5200 traccia un punto sullo schermo nel modo ad alta risoluzione mettendo in ON un bit (BI) all'interno di uno degli 8000 byte (BY) che costituiscono la *bit map*.

La subroutine successiva (linee 5300-5360) trasferisce i byte che memorizzano la forma dei caratteri di una stringa dalla ROM alla *bit map* in modo da poter scrivere un têsto nel video usato in alta risoluzione.

L'ultima subroutine, la 5500, traccia un cerchio. Sia le coordinate del centro che la lunghezza del raggio sono costanti di programma.

La precisione con cui viene tracciata la circonferenza dipende sia dalla taratura dell'apparecchio televisivo (o del monitor) sia da un coefficiente correttivo presente nel programma. Infatti, anche nel caso di una perfetta regolazione, la distanza tra due punti video nella direzione verticale non è rigorosamente uguale alla distanza tra due punti nella direzione orizzontale. Il risultato è che l'esatto calcolo dei punti che formano una circonferenza conduce piuttosto a un'ellisse.

In questo caso si è adottato un fattore correttivo .9 con il quale si riducono di un decimo le ordinate dei punti che formano la circonferenza. Si ricorda, per chi volesse modificarlo, che tale coefficiente è presente, oltre che all'interno della subroutine, anche alle linee 2095 e 2105.

Proposte operative

Si voglia ottenere il diagramma a settori circolari delle vendite in Italia di sistemi EDP nell'anno 1983, limitando la rappresentazione alle quattro maggiori società e riservando una quinta voce per raggruppare tutte le altre. Alla richiesta del numero dei dati da inserire si risponderà, pertanto, 5. Immediatamente apparirà una tabella che si potrà compilare nel modo seguente:

1) OLIVETTI	17060
2) APPLE	6180
3) IBM	4900
4) COMMODORE	3150
5) ALTRI	18210

In presenza di qualche errore di battitura si risponderà N alla richiesta CONFERMI? (Y/N). In tal caso il cursore tornerà a posizionarsi sul primo dato e sarà sufficiente premere il tasto RETURN fino a portarsi sul dato da correggere. Dopo la conferma si dovrà attendere circa 50 secondi perché il computer predisponga la *bit map*, dopodiché comincerà ad apparire la rappresentazione grafica accompagnata dai valori percentuali:

A OLIVETTI	34.4%
B APPLE	12.4%
C IBM	9.8%
D COMMODORE	6.3%
E ALTRI	36.7%

GRAFICI A BASSA RISOLUZIONE

Bassa risoluzione? Perché utilizzare la grafica a bassa risoluzione con un computer in grado di indirizzare pixel per pixel i punti sullo schermo? Il motivo non è banale: l'alta risoluzione, con un programma Basic, ha un suo prezzo costituito dalla lenta esecuzione, dalla maggior quantità di memoria necessaria e dal rischio che le variabili Basic interferiscano con la *bit map*. Non è così invece se si scrivono procedure in Assembler o si utilizzano routine in linguaggio macchina. È quindi ragionevole utilizzare un programma che dia una rappresentazione, sia pure approssimata, ma in un tempo minore. La funzione matematica da rappresentare va definita alla linea iniziale del programma, cioè la numero 10. Iniziata l'esecuzione è possibile scegliere

l'unità di misura. Normalmente si sceglie il valore 1 con il quale si ha a disposizione un piano cartesiano con l'origine nel mezzo e con i limiti − 20 + 20 per l'asse delle X e − 10 + 10 per l'asse delle Y.
Le prime righe dello schermo sono riservate al testo. Non è prevista, come in altri programmi, la possibilità di avere due unità di misura per i due assi o traslare l'origine.
Una prerogativa del programma è invece quella di utilizzare alcuni caratteri grafici del Commodore 64 per simulare un numero doppio di righe e colonne sul video.
I "punti" che formano il grafico sono infatti quadratini di 4 × 4 pixel la superficie dei quali è quindi un quarto di quella occupata dai normali caratteri. Una particolare routine garantisce il loro indirizzo indipendente sullo schermo. Un'altra routine che normalmente viene evitata in programmi analoghi fa in modo che i punti siano collegati fra di loro. Infatti stampando un carattere per ogni colonna dello schermo, quando l'inclinazione di una curva supera i 45°, i punti che la formano si discostano fra di loro e più ci si avvicina alla direzione verticale maggiori sono gli intervalli tra i punti.
È tuttavia possibile, ed è questa la soluzione adottata nel programma, colmare eventuali vuoti con altri punti in modo da dare alla rappresentazione un aspetto più adeguato.

```
10 DEF FNY(X)=.2*X*X-2
20 PRINT"■";:POKE53280,6:LC=54272:GOSUB400
30 PRINT"■";:POKE1144,112:POKE1144+LC,14
40 FORJ=1145TO1182:POKEJ,67:POKEJ+LC,14:NEXT
50 POKE1183,110:POKE1183+LC,14
60 FORJ=1184TO1944STEP40:POKEJ,66:POKEJ+LC,14:NEXT
70 POKE1984,109:POKE1984+LC,14
80 FORJ=1985TO2022:POKEJ,67:POKEJ+LC,14:NEXT
90 POKE2023,125:POKE2023+LC,14
95 POKE1163,114:POKE1163+LC,14
100 FORJ=1223TO1983STEP40:POKEJ,66:POKEJ+LC,14:NEXT
105 POKE2003,113:POKE2003+LC,14
110 FORJ=1203TO1963STEP40:POKEJ,115:POKEJ+LC,14:NEXT
115 POKE1584,107:POKE1584+LC,14
120 FORJ=1585TO1622:POKEJ,114:POKEJ+LC,14:NEXT
125 POKE1623,115:POKE1623+LC,14
130 POKE1603,91:POKE1603+LC,14
140 INPUT" SCEGLI L'UNITA' DI MISURA. U =";U
150 FORXS=-18TO19
160 X=(XS-.25)*U:Y1=INT((FNY(X)/U)+.75)
161 IFFNY(X)/U+.25>Y1THENP1=2:GOTO163
162 P1=1
163 IFXS=-18THEN170
164 IFABS(Y1)>9ANDABS(Y2)>9THEN210
165 DF=Y1-Y2:IFDF=0THEN170
166 IFABS(DF)=1AND(Y2>Y1)AND(P1>P2)THEN170
167 IFABS(DF)=1AND(Y2<Y1)AND(P1<P2)THEN170
168 GOTO1500
170 IFY1<-9ORY1>10THEN210
180 M1=XS+1603-Y1*40
190 GOSUB1000
200 POKEM1,NC:POKEM1+LC,14
```

```
210 X=(XS+.25)*U:Y2=INT((FNY(X)/U)+.75)
212 IFFNY(X)/U+.25>Y2THENP2=2:GOTO220
213 P2=1
215 IFABS(Y1)>9ANDABS(Y2)>9THEN300
220 DF=Y2-Y1:IFDF=0THEN230
222 IFABS(DF)=1AND(Y2>Y1)AND(P2<P1)THEN230
223 IFABS(DF)=1AND(Y2<Y1)AND(P2>P1)THEN230
224 GOTO2500
230 IFY2<-9ORY2>10THEN300
240 M2=XS+1603-Y2*40
250 GOSUB2000
260 POKEM2,NC:POKEM2+LC,14
300 NEXTXS
350 PRINT"■       - VUOI CONTINUARE? (Y/N) -"
360 GETK$:IFK$=""THEN360
370 IFK$="Y"THEN30
380 IFK$="N"THEN500
390 GOTO360
400 PRINT"□"TAB(13)"■■■- GRAFICI -■■■"
410 PRINT"QUESTO PROGRAMMA TRACCIA GRAFICI A BASSA"
420 PRINT"□RISOLUZIONE DI FUNZIONI MATEMATICHE."
430 PRINT"LA FUNZIONE DEVE ESSERE DEFINITA ALLA"
440 PRINT"LINEA 10, LA PRIMA DEL PROGRAMMA."
450 PRINT"SE CIO' E' GIA' STATO FATTO, PREMERE UN"
460 PRINT"TASTO QUALSIASI PER CONTINUARE."
470 GETK$:IFK$=""THEN470
480 RETURN
500 PRINT"□":POKE53280,14:END
1000 NX=PEEK(M1):IFNX=32THEN1050
1010 IFP1=1ANDNX=126THENNC=97:GOTO1070
1020 IFP1=1ANDNX=123THENNC=123:GOTO1070
1030 IFP1=2ANDNX=126THENNC=126:GOTO1070
1040 IFP1=2ANDNX=123THENNC=97:GOTO1070
1050 IFP1=1THENNC=123:GOTO1070
1060 IFP1=2THENNC=126
1070 RETURN
1500 P2=P2+SGN(Y1-Y2):IFP2<1THENP2=2:Y2=Y2-1:GOTO1520
1510 IFP2>2THENP2=1:Y2=Y2+1
1520 XS=XS-1:GOTO230
2000 NX=PEEK(M2):IFNX=32THEN2080
2010 IFP2=1ANDNX=123THENNC=98:GOTO2110
2020 IFP2=1ANDNX=126THENNC=127:GOTO2110
2030 IFP2=1ANDNX=108THENNC=108:GOTO2110
2040 IFP2=1ANDNX=124THENNC=225:GOTO2110
2050 IFP2=2ANDNX=123THENNC=255:GOTO2110
2060 IFP2=2ANDNX=126THENNC=226:GOTO2110
2070 IFP2=2ANDNX=108THENNC=225:GOTO2110
2080 IFP2=2ANDNX=124THENNC=124:GOTO2110
2090 IFP2=1THENNC=108:GOTO2110
2100 IFP2=2THENNC=124
2110 RETURN
2500 P1=P1+SGN(Y2-Y1)
2510 IFP1<1THENP1=2:Y1=Y1-1:GOTO170
2520 IFP1>2THENP1=1:Y1=Y1+1:GOTO170
2530 GOTO170
```

All'inizio del programma è stata definita la funzione da rappresentare e, naturalmente, l'utente potrà definirne altre a suo piacimento. La linea 20, come è ormai consuetudine, modifica il colore del bordo e definisce la variabile LC necessaria per individuare più agevolmente l'indirizzo della memoria del colore per le varie posizioni dello schermo. La linea richiama anche la subroutine 400 per stampare il mes-

saggio iniziale che indica come inserire nel programma la funzione da rappresentare graficamente.
Le successive istruzioni fino alla 130 preparano l'area del video sulla quale verrà tracciato il grafico e segnano gli assi di riferimento, dopo di che spetta all'utente specificare l'unità di misura (variabile U di linea 140).
Il ciclo per la stampa del grafico viene fatto iniziare alla linea 150. Pur trattandosi di un grafico a bassa risoluzione è presente una routine per raddoppiare il numero di righe e di colonne; i caratteri utilizzati sono alcuni di quelli presenti sulla tastiera del Commodore 64. XS è il numero, relativo all'origine, della colonna, X individua invece la semicolonna e si ottiene da XS togliendo o aggiungendo 0.25 (linee 160 e 210).
Y1 è il numero di riga relativo all'origine in corrispondenza della semicolonna di sinistra; P1 viene posto uguale a 1 o a 2 a seconda che il grafico della funzione cada nella metà alta o bassa di una riga del video. La linea 165 calcola la differenza tra l'ordinata di due punti consecutivi per sapere se essi sono a diretto contatto nel qual caso vengono senz'altro stampati, altrimenti viene richiamata la routine 1500 (linea 168) che forza la stampa di un segmento verticale che congiunge i due punti colmando il vuoto esistente.
La linea 200 stampa un punto in corrispondenza della semicolonna di sinistra mentre la linea 260 lo stampa in corrispondenza della semicolonna di destra. Naturalmente, poiché la suddivisione in semirighe e semicolonne è virtuale (con le POKE si indirizza sempre un carattere in una locazione dello schermo) è necessario introdurre una routine per "sommare", potremmo dire, il contenuto delle due semicolonne in modo da ottenere per esse un unico carattere. È questo il significato delle subroutine 1000 e 2000 che, infatti, iniziano con una istruzione PEEK che indaga sul contenuto già esistente in una data locazione dello schermo per poi aggiungere le parti che completano il grafico in corrispondenza della stessa locazione.

Proposte operative

Lasciate l'attuale funzione alla linea 10 e alla richiesta dell'unità di misura battete 1 e RETURN. Dopo brevi istanti apparirà una parabola con la concavità verso l'alto, simmetrica rispetto all'asse delle *y* e con il vertice nel punto (0,-2).
Rispondete Y alla domanda se si vuol continuare, quindi scrivete .5 per l'unità di misura.
Osservate che ora ogni suddivisione degli assi corrisponde a 0.5 unità e l'immagine appare pertanto ingrandita rispetto alla precedente.

Dopo queste prove cambiate la funzione. Rispondete N alla domanda se si vuole continuare e scrivete LIST 10 (RETURN).
Spostate il cursore alla destra del segno = e cambiate la funzione con la seguente: 36/X.
Date il RUN e assegnate il valore 1 all'unità di misura. Appare subito il ramo di un'iperbole equilatera e dopo un'attesa non breve compaiono una linea sull'asse delle Y e l'altro ramo dell'iperbole.
Questo succede perché in corrispondenza dello zero la funzione non è continua ma ha un andamento asintotico, tendendo a $-\infty$ per valori negativi e a $+\infty$ per valori positivi. Fortunatamente la variabile X non assume mai il valore 0 altrimenti sarebbe apparso un messaggio d'errore in quanto non esiste il quoziente della divisione 36/0.
Attenzione pertanto ai punti di discontinuità e all'intervallo d'esistenza della funzione.
Provate ancora con la funzione FNY(X) = SIN(X) con U = .2 e con la funzione FNY(X) = X ↑ 3 − 3 * X con U = .25.

ESERCIZIO 3-1
Come andrà modificato il programma per rappresentare la funzione FNY(X) = LOG(X)?

ESERCIZIO 3-2
Scrivete un breve programma per ottenere il grafico di una funzione stampando semplicemente un asterisco per ogni colonna dello schermo.

GRAFICI AD ALTA RISOLUZIONE

Come nel programma precedente qui si ottiene il grafico di una funzione con la differenza che si adotta l'alta risoluzione nel modo *bit map*.
Come è già stato detto questa tecnica in Basic comporta tempi d'esecuzione piuttosto lunghi, tuttavia i risultati sono di gran lunga superiori.
Per il dimensionamento si è adottata la soluzione di consentire due diverse unità di misura per i due assi cartesiani. Si scelgono infatti gli estremi dell'intervallo in cui deve essere rappresentata la funzione, il programma individua i valori massimo e minimo in detto intervallo, quindi l'utente può scegliere i valori corrispondenti alla parte bassa e a quella alta dello schermo. Prima della comparsa degli assi bisogna attendere circa un minuto perché venga azzerata la *bit map*, cioè la mappa di memoria del video. Un quadratino nero nell'angolo in alto a sinistra indica che il grafico è terminato e premendo un tasto qualsiasi il programma finisce.

Anche in questo caso, bisogna fare molta attenzione al campo d'esistenza della funzione e non comprendere nell'intervallo da rappresentare punti in corrispondenza dei quali non esiste il valore della funzione.

```
10 REM GRAFICI AD ALTA RISOLUZIONE
20 REM ***************************
25 DIM PY(320)
30 PRINT"██████████████":POKE53280,6
40 PRINT"     ┌─────────────────────────────┐"
50 PRINT"     | "SPC(29)" |"
60 PRINT"     |  GRAFICI AD ALTA RISOLUZIONE  |"
70 PRINT"     | "SPC(29)" |"
80 PRINT"     └─────────────────────────────┘"
90 PRINT"████████<PER INIZIARE PREMI UN TASTO QUALSIASI>"
95 GETA$:IFA$=""THEN95
97 REM  ****************
98 REM
100 DEF FNF(X)=SIN(X)
110 REM
115 REM ****************
116 PRINT"█LA FUNZIONE E' DEFINITA ALLA LINEA 100."
120 PRINT"█SCRIVI GLI ESTREMI DELL'INTERVALLO IN"
125 PRINT"CUI VUOI STUDIARE IL GRAFICO DELLA":PRINT"FUNZIONE.█"
126 INPUT"(X1,X2)";X1,X2:IFX1>=X2THENPRINT"▯▯":GOTO126
130 DX=(X2-X1)/320:XX=-X1/DX
131 PRINTTAB(9)"██UN MOMENTO, PREGO"
133 Y1=0:Y2=0
134 FORX=X1TOX2STEPDX:IFFNF(X)<Y1THENY1=FNF(X)
135 IFFNF(X)>Y2THENY2=FNF(X)
136 NEXTX
137 PRINT"▯▯NELL'INTERVALLO CONSIDERATO ESISTONO"
138 PRINT"I SEGUENTI VALORI DELLA FUNZIONE:█"
139 PRINT"MASSIMO =";Y2:PRINT"MINIMO =";Y1
140 PRINT"█SCRIVI L'INTERVALLO PER L'ASSE DELLE Y:"
150 INPUT"█(Y1,Y2)";Y1,Y2:IFY1>=Y2THENPRINT"▯▯":GOTO150
160 DY=(Y2-Y1)/200:YY=199+Y1/DY
170 PRINT"██████████████"
180 PRINT"           UN MOMENTO,PREGO."
190 PRINT"███████DISEGNATO IL GRAFICO, PER TERMINARE IL"
195 PRINT"PROGRAMMA, PREMI UN TASTO QUALSIASI."
250 FORC=0TO319:X=(C-XX)*DX
260 PY(C)=INT(YY-FNF(X)/DY)
270 NEXTC
990 PRINT"█"
1000 BA=8192:POKE53272,PEEK(53272)OR8
1020 FORI=BATOBA+7999:POKEI,0:NEXT
1025 FORI=1024TO2023:POKEI,3:NEXT
1030 POKE53265,PEEK(53265)OR32
1031 IFYY<0ORYY>199THEN1034
1032 GOSUB2100
1034 IFXX<0ORXX>319THEN1040
1035 GOSUB2200
1040 FORX=0TO319:Y=PY(X)
1050 IFY<0ORY>199THEN1100
1060 GOSUB2000
1070 IFX=319THEN1110
1080 IFABS(PY(X+1)-Y)<2THEN1100
1090 Y=Y+SGN(PY(X+1)-Y):GOTO1050
1100 NEXTX
1110 POKE1024,16
1120 GETA$:IFA$=""THEN1120
1130 POKE53265,PEEK(53265)AND223
```

```
1140 POKE53272,21:PRINT"□"
1150 POKE53280,14:END
2000 CH=INT(X/8):RO=INT(Y/8)
2010 LN=YAND7:BY=BA+RO*320+8*CH+LN
2020 BI=7-(XAND7)
2030 POKEBY,PEEK(BY)OR(2↑BI)
2040 RETURN
2100 RO=INT(YY/8):LN=YYAND7:BY=BA+RO*320+LN
2110 FORX=BYTOBY+312STEP8:POKEX,255:NEXT
2120 RETURN
2200 CH=INT(XX/8):BI=2↑(7-(XXAND7))
2210 FORRO=0TO24:FORLN=0TO7
2220 BY=BA+RO*320+8*CH+LN
2230 POKEBY,PEEK(BY)ORBI
2240 NEXTLN:NEXTRO
2250 RETURN
```

Il listato si apre con il dimensionamento di una matrice a una dimensione; essa accoglierà le ordinate dei punti che costituiscono il grafico. La funzione da rappresentare è definita alla linea 100 e naturalmente, per ottenere il grafico di altre funzioni, l'utente dovrà editare o riscrivere tale linea prima di lanciare il programma.
La linea 126 accetta gli estremi entro i quali va studiata la funzione e la successiva calcola il valore del segmento unitario, lungo l'asse orizzontale, il quale, trattandosi di alta risoluzione, corrisponde all'intervallo tra due pixel adiacenti.
La routine 133-136 calcola il massimo e il minimo della funzione nell'intervallo specificato in modo che l'utente possa specificare l'intervallo da rappresentare anche nel senso delle ordinate (linea 150).
DY è il valore unitario per l'asse verticale (linea 160). Il ciclo inizia con l'istruzione 250, controllato dalla variabile C; esso calcola l'ordinata, in pixel, di ogni punto della funzione e memorizza i valori corrispondenti nella matrice PY(C). XX e YY sono le coordinate, anch'esse in pixel, dell'origine.
Alla linea 1000 si inizia la procedura per passare in alta risoluzione (per informazioni più dettagliate si veda l'appendice 3). Le istruzioni 1031-1035 tracciano gli assi di riferimento richiamando le subroutine 2100 e 2200 mentre il ciclo di stampa del grafico inizia alla linea 1040 sotto il controllo della variabile X.
Se il punto non cade all'esterno dello schermo (linea 1050) viene richiamata la subroutine 2000 che individua il byte da modificare nella *bit map* per mettere in ON il punto desiderato. Solo se la differenza tra le ordinate di due punti successivi è superiore a un pixel, si passa attraverso l'istruzione 1090 che forza la stampa di altri punti sulla stessa colonna fino a colmare il vuoto tra due punti consecutivi.
Terminato il grafico, la POKE di linea 1110 fa apparire un quadratino nell'angolo in alto a sinistra dello schermo e, premendo un tasto qualsiasi, si accede alla routine finale (linea 1130-1150) che fa uscire

dall'alta risoluzione, ripristina il colore del bordo e pone termine al programma.

ESERCIZIO 3-3
Modificate il programma in modo da poter rappresentare la funzione FNY(X) = 36/X nell'intervallo X1 = −20, X2 = 20 e Y1 = −10, Y2 = +10.

PUNTI E RETTE SUL PIANO CARTESIANO

Il seguente programma fornisce i primi elementi a chi inizia lo studio della geometria analitica.
Le funzioni svolte sono molteplici: posizioni dei punti date le loro coordinate, resi più evidenti con le linee di costruzione tratteggiate; coordinate del punto medio tra due punti dati; distanza tra due punti; grafico di una o più rette simultaneamente, date le loro equazioni esplicite; equazione di una retta passante per due punti; retta di dato coefficiente angolare e passante per un punto. Vengono individuate condizioni di parallelismo ed è previsto l'input di rette parallele all'asse y, aventi, com'è noto, un'equazione nella forma $x = K$ mentre l'equazione generica della retta è $y = mx + q$.
La parte grafica del programma si serve dell'alta risoluzione ottenuta con il modo *bit map*. Questa soluzione comporta un'attesa di circa un minuto all'inizio di ogni sezione del programma per "l'azzeramento" dell'area di memoria del video. Tuttavia, restando nell'ambito di una sezione, si può passare continuamente dal modo testo al modo *bit map* senza dover attendere e senza cancellare la parte grafica precedentemente ottenuta.
Per esempio, è possibile stampare sullo stesso sistema di assi cartesiani quante rette si desidera per mettere in evidenza condizioni di parallelismo, di perpendicolarità, ecc.

```
10 REM       PUNTI E RETTE
20 REM ************************
30 PRINT"■■■■■■■■■■":POKE53280,6
40 PRINT"       ┌──────────────────────┐"
50 PRINT"       |"SPC(25)"|"
60 PRINT"       |       PUNTI E RETTE       |"
70 PRINT"       |"SPC(25)"|"
80 PRINT"       |   SUL PIANO CARTESIANO    |"
90 PRINT"       |"SPC(25)"|"
100 PRINT"      └──────────────────────┘"
110 PRINT"■■■■■ PREMI UN TASTO QUALSIASI PER COMINCIARE"
120 GETK$:IFK$=""THEN120
140 DEFFNY(X)=M*X+Q
150 BA=8192
200 PRINT"■"
```

```
210 PRINT"■■  PREMI:"
220 PRINT"■  1. PER I PUNTI DI DATE COORDINATE"
230 PRINT"■  2. PER LA DISTANZA TRA DUE PUNTI"
240 PRINT"■  3. PER IL PUNTO MEDIO"
250 PRINT"■  4. PER LE RETTE DI DATA EQUAZIONE"
260 PRINT"■  5. PER L'EQUAZIONE DI UNA RETTA              PASSANTE PER DUE PUNTI"
270 PRINT"■  6. PER UNA RETTA DI DATO COEFFICIENTE"
280 PRINT"      ANGOLARE, PASSANTE PER UN PUNTO"
300 PRINT"■  7. PER FINIRE"
310 GETK$:IFK$=""THEN310
320 N=ASC(K$)-48:IFN<1ORN>7THEN310
330 IFN=7THEN8000
340 GOSUB9000:GOSUB9300:GOSUB9700
350 ONNGOTO1000,2000,3000,4000,5000,6000
1000 REM PUNTO DI DATE COORDINATE
1010 PRINT"↓SCRIVI LE COORDINATE DEL PUNTO■■"
1020 INPUT"  X =";X1:XP=INT(X1/U)+159
1030 INPUT"  Y =";Y1:YP=INT(99-Y1/U)
1035 IFSZ=6THEN6020
1040 GOSUB9400:GOSUB9100:GOSUB1050:GOTO1160
1050 IFXP<0ORXP>319THEN1155
1060 IFYP<0ORYP>199THEN1155
1070 X=XP:Y=YP:GOSUB9200
1080 IFXP=159THEN1120
1090 IFXP<159THEN1110
1100 FORX=159TOXPSTEP4:GOSUB9200:NEXT:GOTO1120
1110 FORX=XPTO159STEP4:GOSUB9200:NEXT
1120 IFYP=99THEN1155
1130 X=XP:IFYP>99THEN1150
1140 FORY=YPTO99STEP4:GOSUB9200:NEXT:GOTO1155
1150 FORY=99TOYPSTEP4:GOSUB9200:NEXT
1155 RETURN
1160 POKE1024,16
1170 GETK$:IFK$=""THEN1170
1180 GOSUB9300
1190 PRINT"↓VUOI TRACCIARE UN ALTRO PUNTO? (Y/N)"
1200 GETK$:IFK$=""THEN1200
1210 IFK$="Y"THEN1010
1220 IFK$="N"THEN200
1230 GOTO1200
2000 REM DISTANZA TRA DUE PUNTI
2010 PRINT"↓SCRIVI LE COORDINATE DEI DUE PUNTI.■■"
2020 PRINT"PRIMO PUNTO:"
2030 INPUT"■   X1 =";X1
2040 INPUT"   Y1 =";Y1
2050 PRINT"■SECONDO PUNTO:"
2060 INPUT"■   X2 =";X2
2070 INPUT"   Y2 =";Y2
2075 GOSUB9400:GOSUB9100
2080 XP=INT(X1/U)+159
2090 YP=INT(99-Y1/U)
2100 GOSUB1050
2110 XP=INT(X2/U)+159
2120 YP=INT(99-Y2/U)
2130 GOSUB1050
2135 IFSZ=5THEN5020
2140 IFX1=X2THEN2260
2150 IFX1>X2THENI=XP:F=INT(X1/U)+159:GOTO2170
2160 I=INT(X1/U)+159:F=XP
2170 M=(Y2-Y1)/(X2-X1)
2180 Q=(Y1*X2-X1*Y2)/(X2-X1)
2190 FORX=ITOF:Y=INT(99-FNY((X-159)*U)/U)
2200 IFY<0ORY>199THEN2250
2210 GOSUB9200
2220 IFX=FTHEN2260
2230 DY=INT(99-FNY((X-158)*U)/U)-Y:IFABS(DY)<2THEN2250
```

```
2240 Y=Y+SGN(DY):GOTO2200
2250 NEXTX
2260 IFSZ=3THEN3020
2265 POKE1024,16
2270 GETK$:IFK$=""THEN2270
2280 GOSUB9300
2285 IFSZ=5THEN5040
2290 D=SQR((X2-X1)↑2+(Y2-Y1)↑2)
2300 PRINT"LA DISTANZA TRA I DUE PUNTI,"
2310 PRINT"■    A(";X1;",";Y1;")      B(";X2;",";Y2;")"
2320 PRINT"■E' DI";D;"UNITA'."
2330 GOTO8500
3000 REM  PUNTO MEDIO
3010 SZ=3:GOTO2010
3020 SZ=0
3030 XM=(X1+X2)/2:YM=(Y1+Y2)/2
3040 XP=INT(XM/U)+159
3050 YP=INT(99-YM/U)
3060 GOSUB1050
3070 POKE1024,16
3080 GETK$:IFK$=""THEN3080
3090 GOSUB9300
3100 PRINT"IL PUNTO MEDIO E':■■"
3110 PRINT"            M(";XM;",";YM;")■■"
3120 GOTO8500
4000 REM RETTE DI DATA EQUAZIONE
4010 PRINT"■LA RETTA E' PARALLELA ALL'ASSE DELLE Y?■"
4020 INPUT"(Y/N)";R$
4030 IFR$="Y"THEN4060
4040 IFR$="N"THENGOSUB9900:GOTO4110
4050 GOTO4020
4060 PRINT"■L'EQUAZIONE DELLA RETTA E':■"
4070 PRINT"          X=K■"
4080 INPUT"K =";K:XX=INT(K/U)+159
4090 GOSUB9400:GOSUB9100
4100 GOSUB9600:GOTO4190
4110 GOSUB9400:GOSUB9100
4115 IFM=0THENYY=INT(99-Q/U):GOSUB9500:GOTO4190
4120 FORX=0TO319:Y=INT(99-FNY((X-159)*U)/U)
4130 IFY<0ORY>199THEN4180
4140 GOSUB9200
4150 DY=INT(99-FNY((X-158)*U)/U)-Y
4160 IFABS(DY)<2THEN4180
4170 Y=Y+SGN(DY):GOTO4130
4180 NEXTX
4190 POKE1024,16
4200 GETK$:IFK$=""THEN4200
4210 GOSUB9300:IFSZ=6THEN6080
4220 PRINT"VUOI TRACCIARE UN'ALTRA RETTA? (Y/N)"
4230 GETK$:IFK$=""THEN4230
4240 IFK$="Y"THEN4270
4250 IFK$="N"THEN200
4260 GOTO4200
4270 IFSZ=6THEN6170
4280 GOTO4010
5000 REM  RETTA PASSANTE PER 2 PUNTI
5010 SZ=5:GOTO2000
5020 IFX1<>X2THEN5026
5025 XX=INT(X1/U)+159:GOSUB9600:GOTO2265
5026 IFY1<>Y2THEN5030
5028 YY=INT(99-Y1/U):GOSUB9500:GOTO2265
5030 I=0:F=319:GOTO2170
5040 SZ=0
5050 PRINT"L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER I"
5060 PRINT"PUNTI,■■"
5070 PRINT"      A(";X1;",";Y1;")       B(";X2;",";Y2;")■■"
```

```
5080 PRINT"E':";
5090 IFX1=X2THENPRINT"     X=";X1;"■■":GOTO8500
5100 PRINT"          Y=";INT(M*100)/100;"*X +";INT(Q*100)/100;"■■"
5110 GOTO8500
6000 REM RETTA PASSANTE PER UN PUNTO
6010 SZ=6:GOTO1010
6020 PRINT"■SCRIVI IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA"
6030 PRINT"RETTA.■■"
6040 INPUT"  M =";M
6050 GOSUB9400:GOSUB9100:GOSUB1050
6060 Q=Y1-M*X1
6070 GOTO4115
6080 PRINT"■L'EQUAZIONE DELLA RETTA E':■■"
6090 PRINT"      Y=";
6100 IFM=0THEN6120
6110 PRINTINT(M*100)/100;"*X";
6120 IFQ=0THEN6150
6130 IFQ>0THENPRINT"+";
6140 PRINTINT(100*Q)/100
6150 PRINT"■■"
6160 GOTO4220
6170 SZ=0:GOTO6000
8000 POKE53280,14:PRINT"■":END
8500 PRINT"■■     PREMI UN TASTO PER CONTINUARE."
8510 GETK$:IFK$=""THEN8510
8520 GOTO200
9000 REM INIZIALIZZA BIT MAP
9010 PRINT"■":POKE53272,PEEK(53272)OR8
9020 FORI=BATOBA+7999:POKEI,0:NEXT
9030 FORI=1024TO2023:POKEI,3:NEXT
9040 POKE53265,PEEK(53265)OR32
9050 RETURN
9100 REM DISEGNA GLI ASSI
9110 FORX=BA+3843TOBA+4155STEP8:POKEX,255:NEXT
9120 FORRO=0TO24:FORLN=0TO7
9130 BY=BA+RO*320+8*19+LN
9140 POKEBY,PEEK(BY)OR1
9150 NEXTLN:NEXTRO
9160 FORX=BA+3844TOBA+4156STEP8:POKEX,PEEK(X)OR1:NEXT
9170 FORRO=0TO24:BY=BA+RO*320+8*19+3
9180 POKEBY,PEEK(BY)OR2:NEXTRO
9190 RETURN
9200 REM TRACCIA UN PUNTO
9210 CH=INT(X/8):RO=INT(Y/8)
9220 LN=YAND7:BY=BA+RO*320+8*CH+LN
9230 BI=7-(XAND7)
9240 POKEBY,PEEK(BY)OR(2↑BI)
9250 RETURN
9300 REM TORNA NEL MODO TESTO
9310 POKE53265,PEEK(53265)AND223
9320 POKE53272,21:PRINT"■"
9330 RETURN
9400 REM TORNA IN BIT MAP
9410 PRINT"■"
9420 POKE53272,PEEK(53272)OR8
9430 FORI=1024TO2023:POKEI,3:NEXT
9440 POKE53265,PEEK(53265)OR32
9450 RETURN
9500 REM TRACCIA RETTA ORIZZONTALE
9510 RO=INT(YY/8):LN=YYAND7:BY=BA+RO*320+LN
9520 FORX=BYTOBY+312STEP8:POKEX,255:NEXT
9530 RETURN
9600 REM TRACCIA RETTA VERTICALE
9610 CH=INT(XX/8):BI=2↑(7-(XXAND7))
9620 FORRO=0TO24:FORLN=0TO7
9630 BY=BA+RO*320+8*CH+LN
```

```
9640 POKEBY,PEEK(BY)ORBI
9650 NEXTLN:NEXTRO
9660 RETURN
9700 REM RICHIESTA UNITA' DI MISURA
9710 PRINT"■SCEGLI L'UNITA' DI MISURA."
9720 PRINT"■IL VALORE U=1 E' IL VALORE STANDARD CHE"
9730 PRINT"CONSENTE DI LAVORARE NEGLI■INTERVALLI"
9740 PRINT"-20,+20, PER L'ASSE DELLE X E -12,+12"
9750 PRINT"PER L'ASSE DELLE Y."
9760 PRINT"VALORI DI U MINORI DI 1 CORRISPONDONO AD"
9770 PRINT"□UN INGRANDIMENTO MENTRE VALORI MAGGIORI"
9780 PRINT"DI 1 CONSENTONO LA RAPPRESENTAZIONE DI"
9790 PRINT"UN CAMPO PIU' VASTO."
9800 INPUT"■   U =";U:U=U/8
9810 IFU<=0THEN9800
9820 PRINT"■":RETURN
9900 REM PARAMETRI RETTA
9910 PRINT"■L'EQUAZIONE DELLA RETTA E':"
9920 PRINT"■          Y=M*X+Q"
9930 INPUT"■M =";M
9940 INPUT"■Q =";Q
9950 RETURN
```

Il programma si apre con il titolo (linee 30-120) e con la definizione della funzione che rappresenta analiticamente la retta (linea 140). La variabile BA (linea 150) rappresenta l'indirizzo base usato nel modo grafico ad alta risoluzione.

Il menù prevede sei sezioni operative alle quali si accede tramite l'istruzione ON GOTO di linea 350, non prima di aver azzerato la *bit map* e aver indicato l'unità di misura (subroutine 9000, 9300 e 9700).

Le linee 1020, 1030 accettano in input le coordinate di un punto. Le stesse sono utilizzate anche nella sezione numero sei e la variabile SZ (linea 1035) garantisce il ritorno a essa. La subroutine 9400, richiamata dalla linea 1040, fa tornare in alta risoluzione senza tuttavia azzerare la *bit map*; in questo modo si può passare ripetutamente dal modo testo all'alta risoluzione aggiungendo nuovi elementi al grafico senza alterare quelli già esistenti.

Le istruzioni 1050-1150, strutturate in una subroutine, tracciano linee tratteggiate a partire dal punto specificato, perpendicolarmente agli assi.

Terminata l'operazione, la POKE di riga 1160 fa apparire un quadratino nell'angolo in alto a sinistra del video e, alla pressione di un tasto, si passa alla richiesta della subroutine 9300 che fa tornare il programma nel modo testo consentendo l'introduzione di nuovi dati o il ritorno al menù principale.

Alla linea 2000 inizia la seconda sezione per tracciare sul piano cartesiano due punti e trovare la loro distanza.

La routine per l'introduzione delle coordinate (linee 2000-2130) è utilizzata anche dalla sezione cinque e la decisione di riga 2135 fa proseguire il programma sui giusti binari.

La presenza del calcolo del coefficiente angolare M e dell'ordinata

all'origine Q alle linee 2170-2180 è giustificata dal fatto che le stesse istruzioni vengono utilizzate anche dalla sezione cinque che dà l'equazione della retta passante per due punti. Tuttavia, provenendo dalla sezione due, le variabili I e F vengono poste uguali alle ascisse dei due punti specificati e viene così tracciato un segmento che li congiunge, mentre, provenendo dalla sezione cinque I e F vengono posti uguali rispettivamente a 0 e 319 così da tracciare una retta che passa per i due punti.

Il calcolo della loro distanza avviene alla linea 2290. La breve parte del programma compresa tra le linee 3000-3120 si avvale nelle due precedenti sezioni per tracciare due punti ed il loro punto medio. La POKE di linea 3070 indica il termine dell'esecuzione della parte grafica e, dopo la stampa dei risultati, si passa alla linea 8500 dove viene inviato un messaggio per tornare al menù principale. La successiva sezione accetta l'equazione di una retta distinguendo se essa è parallela all'asse verticale oppure no.

Nel primo caso il programma fluisce attraverso la richiesta del parametro K (linea 4080) e la subroutine 9600 che traccia una retta verticale; nel secondo caso l'input avviene con la subroutine 9900 e il programma prosegue alla linea 4110. Il successivo ciclo FOR NEXT (linee 4120-4180) traccia la retta per punti ed è provvisto di istruzioni di controllo (4160-4170) per colmare eventuali vuoti tra punto e punto.

Tornati nel modo testo è possibile introdurre nuovi dati e disegnare altre rette accanto alle precedenti in quanto non viene azzerata la *bit map*.

La quinta sezione traccia una retta per due punti dati. La variabile S2 garantisce il ritorno quando il programma passa a precedenti sezioni per svolgere determinate operazioni.

Nei casi particolari di rette verticali od orizzontali la rappresentazione grafica è a carico delle subroutine 9600 e 9500 richiamate alle linee 5025 e 5028 altrimenti il controllo passa temporaneamente alla sezione due (linea 5030).

Le istruzioni 5050-5100 stampano i risultati consistenti nell'equazione della retta in cui i coefficienti vengono dati in forma decimale, approssimati alla seconda cifra decimale.

Anche la sesta sezione si avvale delle precedenti per una parte dell'input dei dati e per la rappresentazione grafica. L'equazione della retta viene invece stampata dalle linee di programma 6080-6150 e anche da qui è possibile tornare a introdurre nuovi dati, aggiungendo nuove rette senza cancellare la parte grafica realizzata fino ad allora.

L'ultima parte del listato è occupata dalle subroutine delle quali si è già parlato e le cui funzioni sono illustrate nelle REM che le precedono.

Proposte operative

Selezionate l'opzione 4 del menù. Dopo una pausa di circa un minuto appare la richiesta dell'unità di misura. Ponete U = 1. Scegliete quindi una retta non parallela all'asse y rispondendo N alla successiva domanda, quindi ponete M = .5 e Q = 3.
Otterrete il grafico della retta $y = \frac{1}{2}x + 3$. La condizione di perpendicolarità tra due rette si ha quando i loro coefficienti angolari sono reciproci e di segno opposto. Per ottenere una retta perpendicolare a quella che appare sul video è perciò sufficiente che il suo coefficiente angolare sia -2.
Premete allora un tasto per tornare nel modo normale di scrittura e selezionate nuovamente l'input per una retta generica ponendo M = -2 e, per esempio, Q = -10.
Terminata l'operazione, apparirà nuovamente la retta precedente e subito dopo se ne formerà una seconda. Sono perpendicolari?

ESERCIZIO 3-4
Scrivete un programma che accetti in input le equazioni di due rette e calcoli il loro punto di intersezione.

PARABOLE

Mentre il precedente programma era prevalentemente indirizzato a uno studente di scuola media inferiore, quello che segue è più adatto a chi segue studi superiori.
La parabola è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso, detto fuoco, e da una retta, detta direttrice. Analiticamente è data dall'equazione di secondo grado:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Le coordinate del vertice sono legate alle costanti a, b, c, dalle seguenti uguaglianze:

$$X = -\frac{b}{2a} \qquad Y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Il fuoco ha la stessa ascissa del vertice e ordinata

$$Y = \frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

La direttrice è una retta di equazione:

$$y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

L'asse di simmetria è una retta di equazione:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Il programma, accettati in input i valori delle costanti a, b, c, fornisce tutti gli elementi su esposti e i punti di intersezione con gli assi cartesiani. La costante c fornisce il punto di intersezione con l'asse y, mentre le intersezioni con l'asse x sono date, se esistono, dalle soluzioni reali dell'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Il programma fornisce inoltre i punti d'intersezione tra una parabola e una retta generica, anche parallela all'asse y. Le coordinate di tali punti sono le soluzioni del sistema formato dall'equazione della parabola e da quella della retta.
Un'ulteriore funzione svolta dal programma è lo studio analitico di una parabola passante per tre punti dati. A tale riguardo si noti che se una parabola passa per il punto di coordinate (3, 2), sostituendo questi valori a x e y nell'equazione generica $y = ax^2 + bx + c$, si ottiene:

$$2 = 9a + 3b + c$$

Quindi, dati tre punti ed applicando lo stesso procedimento, si ottengono 3 equazioni di primo grado a tre incognite che, poste a sistema, danno i valori di a, b, c. Per quanto riguarda la parte grafica, anche qui è stato utilizzato il modo *bit map* per l'alta risoluzione e molte subroutine sono le stesse già incontrate nel precedente programma.

```
10 REM         PARABOLE
20 REM ************************
30 PRINT"[illegible]":POKE53280,6
40 PRINT"       ┌──────────────────────────┐"
50 PRINT"       │"SPC(25)"│"
60 PRINT"       │   GEOMETRIA ANALITICA    │"
70 PRINT"       │"SPC(25)"│"
80 PRINT"       │          PARABOLE        │"
90 PRINT"       │"SPC(25)"│"
100 PRINT"      └──────────────────────────┘"
```

```
110 PRINT"■■■■■ PREMI UN TASTO QUALSIASI PER COMINCIARE"
120 GETK$:IFK$=""THEN120
140 DEFFNY(X)=A*X*X+B*X+C
150 BA=8192
200 PRINT"□":PA$="N"
210 PRINT"■■  PREMI:"
220 PRINT"■  1. PER LO STUDIO DELLA PARABOLA."
230 PRINT"■  2. PER L'INTERSEZIONE CON UNA RETTA."
240 PRINT"■  3. PER UNA PARABOLA PASSANTE PER TRE"
250 PRINT"     PUNTI."
260 PRINT"■  4. PER FINIRE.■■■■"
300 GETK$:IFK$=""THEN300
310 N=ASC(K$)-48:IFN<1ORN>5THEN300
320 IFN=4THEN8000
330 ONNGOTO1000,2000,3000
1000 REM    STUDIO DELLA PARABOLA
1030 SZ=1:GOSUB8500
1040 VX=INT(-B*1000/(2*A)+.5)/1000:D=B↑2-4*A*C
1050 VY=INT(-D*1000/(4*A)+.5)/1000
1060 PRINT"□COORDINATE DEL VERTICE:■"
1070 PRINTTAB(8)"XV=";VX;"      YV=";VY
1080 PRINT"■ASSE DI SIMMETRIA:   X =";VX
1100 PRINT"■COORDINATE DEL FUOCO:■"
1110 PRINTTAB(8)"XF=";VX;"      YF=";INT(1000*(1/(4*A)-D/(4*A)))/1000
1120 PRINT"■DIRETTRICE:     ";
1130 PRINT"Y =";INT(1000*(-1/(4*A)-D/(4*A))+.5)/1000
1140 PRINT"■INTERSEZIONE CON L'ASSE Y:   Y=";C
1160 IFD>=0THEN1180
1170 PRINT"■LA PARABOLA NON INTERSECA L'ASSE DELLE X":GOTO1220
1180 X1=(-B-SQR(D))/(2*A):X2=(-B+SQR(D))/(2*A)
1190 PRINT"■LA BARABOLA INTERSECA L'ASSE DELLE X"
1200 PRINT"NEI PUNTI:■"
1210 PRINTTAB(8)"X1=";INT(1000*X1+.5)/1000;"   X2=";INT(1000*X2+.5)/1000
1220 GOTO4000
2000 REM INTERSEZIONE CON UNA RETTA
2010 SZ=2:GOSUB8500:GOSUB5000:PRINT"□"
2020 IFPA$="Y"THEN2100
2030 DI=(B-M)↑2-4*A*(C-Q):IFDI>=0THEN2050
2040 PRINT"NON ESISTONO PUNTI DI INTERSEZIONE.■":GOTO4000
2050 X1=(-(B-M)-SQR(DI))/(2*A):Y1=M*X1+Q
2060 X2=(-(B-M)+SQR(DI))/(2*A):Y2=M*X2+Q
2070 PRINT"PUNTI DI INTERSEZIONE:■■"
2075 PRINT"  P1=(";INT(1000*X1+.5)/1000;",";INT(1000*X2+.5)/1000;")■"
2080 PRINT"  P2=(";INT(1000*X2+.5)/1000;",";INT(1000*X2+.5)/1000;")■"
2090 GOTO4000
2100 PRINT"PUNTO DI INTERSEZIONE:■■"
2110 PRINT"  P=(";INT(1000*K+.5)/1000;",";INT(1000*FNY(K)+.5)/1000;")■"
2120 GOTO4000
3000 REM  PARABOLA PER TRE PUNTI
3010 PRINT"□SCRIVI LE COORDINATE DEI TRE PUNTI.■■"
3020 INPUT"PUNTO 1 (X1,Y1) ";X1,Y1
3030 INPUT"■PUNTO 2 (X2,Y2) ";X2,Y2
3040 INPUT"■PUNTO 3 (X3,Y3) ";X3,Y3
3050 E1=X1*X1:E2=X1:E3=1:E4=X2*X2:E5=X2
3060 E6=1:E7=X3*X3:E8=X3:E9=1:GOSUB6000
3070 IFDW<>0THEN3100
3080 PRINT"■SPIACENTE NON POSSO DARE LA RISPOSTA."
3090 GOSUB9300
3100 DD=DW:E1=Y1:E4=Y2:E7=Y3:GOSUB6000:D1=DW
3110 E1=X1*X1:E4=X2*X2:E7=X3*X3
3120 E2=Y1:E5=Y2:E8=Y3:GOSUB6000:D2=DW
3130 E2=X1:E5=X2:E8=X3:E3=Y1:E6=Y2:E9=Y3
3140 GOSUB6000:D3=DW
3150 A=INT(1000*D1/DD+.5)/1000
3160 B=INT(1000*D2/DD+.5)/1000
3170 C=INT(1000*D3/DD+.5)/1000
```

```
3180 PRINT"■LA PARABOLA E':■■■"
3190 PRINTTAB(8)"Y=";A;"*X□2■";
3200 IFB=0THEN3230
3210 IFB>0THENPRINT"+";
3220 PRINTB;"*X";
3230 IFC=0THENPRINT:GOTO3260
3240 IFC>0THENPRINT"+";
3250 PRINTC
3260 PRINT"■■■VUOI PROSEGUIRE CON LO STUDIO DELLA"
3270 PRINT"PARABOLA? (Y/N)"
3280 GETK$:IFK$=""THEN3280
3290 IFK$="Y"THENSZ=1:GOTO1040
3300 IFK$="N"THEN4000
3310 GOTO3280
4000 REM    GRAFICO
4010 PRINT"■      VUOI IL GRAFICO? (Y/N)"
4020 GETK$:IFK$=""THEN4020
4030 IFK$="Y"THEN4060
4040 IFK$="N"THEN200
4050 GOTO4020
4060 GOSUB9700
4070 PRINT"■■ATTENDI CHE VENGA AZZERATA LA BIT MAP."
4080 FORT=1TO2000:NEXT
4090 GOSUB9000:GOSUB9100
4100 FORX=0TO319:Y=INT(99-FNY((X-159)*U)/U)
4110 IFY<0ORY>199THEN4160
4120 GOSUB9200
4130 DY=INT(99-FNY((X-158)*U)/U)-Y
4140 IFABS(DY)<2THEN4160
4150 Y=Y+SGN(DY):GOTO4110
4160 NEXTX
4170 IFSZ=1ORRT=1THENRT=0:GOTO4220
4180 IFPA$<>"Y"THEN4200
4190 XX=INT(K/U)+159:GOSUB9600:GOTO4220
4200 IFM=0THENYY=INT(99-Q/U):GOSUB9500:GOTO4220
4210 A=0:B=M:C=Q:RT=1:GOTO4100
4220 POKE1024,16
4230 GETK$:IFK$=""THEN4230
4240 GOSUB9300
4250 PRINT"■VUOI IL GRAFICO CON UN ALTRORAPPORTO DI"
4260 PRINT"SCALA? (Y/N)"
4270 GETK$:IFK$=""THEN4270
4280 IFK$="Y"THEN4060
4290 IFK$="N"THEN200
4300 GOTO4270
4990 REM COEFFICIENTI DELLA RETTA
5000 PRINT"■LA RETTA E' PARALLELA ALL'ASSE DELLE Y?"
5010 PRINT"(Y/N)  ";
5020 GETK$:IFK$=""THEN5020
5030 IFK$="Y"THENPRINT"Y":GOTO5060
5040 IFK$="N"THENPRINT"N":GOTO5100
5050 GOTO5020
5060 PRINT"■L'EQUAZIONE DELLA RETTA E':■"
5070 PRINTTAB(14)"X=K■"
5080 INPUT"K =";K:PA$="Y"
5090 GOTO5140
5100 PRINT"■L'EQUAZIONE DELLA RETTA E':"
5110 PRINTTAB(14)"■Y=M*X+Q"
5120 INPUT"■M =";M
5130 INPUT"Q =";Q
5140 RETURN
6000 DW=E1*(E5*E9-E6*E8)-E2*(E4*E9-E7*E6)+E3*(E4*E8-E5*E7)
6010 RETURN
8000 POKE53280,14:PRINT"■":END
8500 PRINT"■L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA E':■■"
8510 PRINT"            Y=A*X□2■+B*X+C■■"
```

```
8600 REM   INPUT A,B,C
8610 INPUT"■A =";A:IFA=0THENPRINT"PER UNA PARABOLA DEVE ESSERE A<>0!":GOTO 8610
8620 INPUT"B =";B:INPUT"C =";C
8630 RETURN
9000 REM INIZIALIZZA BIT MAP
9010 PRINT"■":POKE53272,(PEEK(53272)AND240)OR8
9020 FORI=BATOBA+7999:POKEI,0:NEXT
9030 FORI=1024TO2023:POKEI,3:NEXT
9040 POKE53265,PEEK(53265)OR32
9050 RETURN
9100 REM DISEGNA GLI ASSI
9110 FORX=BA+3843TOBA+4155STEP8:POKEX,255:NEXT
9120 FORRO=0TO24:FORLN=0TO7
9130 BY=BA+RO*320+8*19+LN
9140 POKEBY,PEEK(BY)OR1
9150 NEXTLN:NEXTRO
9160 FORX=BA+3844TOBA+4156STEP8:POKEX,PEEK(X)OR1:NEXT
9170 FORRO=0TO24:BY=BA+RO*320+8*19+3
9180 POKEBY,PEEK(BY)OR2:NEXTRO
9190 RETURN
9200 REM TRACCIA UN PUNTO
9210 CH=INT(X/8):RO=INT(Y/8)
9220 LN=YAND7:BY=BA+RO*320+8*CH+LN
9230 BI=7-(XAND7)
9240 POKEBY,PEEK(BY)OR(2↑BI)
9250 RETURN
9300 REM TORNA NEL MODO TESTO
9310 POKE53265,PEEK(53265)AND223
9320 POKE53272,21:PRINT"■"
9330 RETURN
9400 REM TORNA IN BIT MAP
9410 PRINT"■"
9420 POKE53272,PEEK(53272)OR8
9430 FORI=1024TO2023:POKEI,3:NEXT
9440 POKE53265,PEEK(53265)OR32
9450 RETURN
9500 REM TRACCIA RETTA ORIZZONTALE
9510 RO=INT(YY/8):LN=YYAND7:BY=BA+RO*320+LN
9520 FORX=BYTOBY+312STEP8:POKEX,255:NEXT
9530 RETURN
9600 REM TRACCIA RETTA VERTICALE
9610 CH=INT(XX/8):BI=2↑(7-(XXAND7))
9620 FORRO=0TO24:FORLN=0TO7
9630 BY=BA+RO*320+8*CH+LN
9640 POKEBY,PEEK(BY)ORBI
9650 NEXTLN:NEXTRO
9660 RETURN
9700 REM RICHIESTA UNITA' DI MISURA
9710 PRINT"■SCEGLI L'UNITA' DI MISURA."
9720 PRINT"■IL VALORE U=1 E' IL VALORE STANDARD."
9730 PRINT"VALORI DI U MINORI DI 1 CORRISPONDONO AD"
9740 PRINT"■UN INGRANDIMENTO MENTRE VALORI MAGGIORI"
9750 PRINT"DI 1 CONSENTONO LA RAPPRESENTAZIONE DI"
9760 PRINT"UN CAMPO PIU' VASTO."
9770 INPUT"■   U =";U:U=U/8
9780 IFU<=0THEN9770
9790 RETURN
```

Il listato si apre con il titolo del programma (linee 30-120). Alla linea 140 viene definita la funzione che rappresenta l'equazione generica di una parabola. L'istruzione DEF viene sempre posta all'inizio poiché va eseguita una sola volta non essendo consentito definire più volte la stessa funzione. La variabile BA, come nel programma precedente,

contiene l'indirizzo base per la *bit map* utilizzata per la rappresentazione grafica in alta risoluzione.

Segue il menù (linee 200-330) con tre sezioni operative. Alla linea 200 viene inizializzata la variabile *flag* PA$ che indicherà in seguito se la retta è parallela all'asse delle *y*. Solitamente le variabili *flag* sono numeriche, qui invece è stata posta una variabile stringa ma il concetto rimane immutato.

L'istruzione 310 opera sulla stringa K$ che rappresenta il tasto premuto, in modo da ottenere un numero compreso tra 1 e 4 per poter poi accedere alle corrispondenti sezioni di programma. Per maggiore chiarezza queste iniziano con i numeri di linea 1000, 2000 e 3000. Alla linea 1030, S2 contiene la sezione di lavoro nella quale si opera ed è indispensabile quando si passa da una sezione all'altra per utilizzare congiuntamente alcune parti del programma senza volerle strutturare in subroutine.

È bene tuttavia non abusare di questa tecnica che francamente complica la lettura del listato e può facilmente condurre a ciò che gli anglosassoni definiscono pittorescamente con l'espressione "*spaghetti programming*".

Sempre alla stessa linea si richiama la subroutine 8500 che accetta in input i coefficienti dell'equazione della parabola.

Seguono i calcoli e la stampa dei risultati che vengono dati approssimati a meno di un millesimo, come risulta evidente dalla presenza della funzione INT(1000 * ...) /1000.

Le formule utilizzate sono quelle riportate nella parte generale che precede il listato.

La sezione numero due si apre con il rinvio a due subroutine (linea 2010) per l'introduzione dei dati relativi alla parabola, la prima, ed alla retta, la seconda.

La variabile *flag* PA$, già citata, può assumere i valori N o Y. Nel caso più generale che la retta non sia parallela all'asse verticale la routine 2030-2060 risolve un sistema di equazioni di secondo grado per trovare, se esistono, i punti di intersezione tra la retta e la parabola.

La sezione alle linee 3000-3310 trova l'equazione di una parabola passante per tre punti dati. Inizialmente vengono accettate in input le coordinate dei punti (linee 3000-3040) che vengono trasferite nelle variabili di lavoro E1, E2, E3, ..., E9 prima di accedere alla subroutine 6000. Questo calcola un determinante di terzo ordine conformemente al metodo di Cramer utilizzato per risolvere il sistema di equazioni lineari la cui soluzione dà i coefficienti dell'equazione della parabola richiesta.

DD è il determinante di sistema mentre D1, D2 e D3 sono i determi-

nanti che si ottengono sostituendo successivamente gli elementi delle tre colonne con i termini noti del sistema.

Il significato delle linee 3070-3090 è che il sistema ammette una soluzione se il suo determinante è diverso da zero.

Se questa condizione è soddisfatta la soluzione è calcolata alle righe 3150-3170 con l'approssimazione a meno di un millesimo.

Dopo la scrittura dell'equazione della parabola cercata (linee 3180-3250) si può procedere allo studio delle sue caratteristiche passando direttamente alla prima sezione (linea 3290).

Effettuata una qualsiasi operazione di tipo analitico prevista dal programma si passa comunque alla linea 4000, passaggio obbligato per accedere alla routine che traccia il grafico della parabola in alta risoluzione.

La linea 4090 richiama due subroutine rispettivamente per inizializzare la *bit map* e per tracciare gli assi di riferimento, operazione che nel complesso richiede un certo tempo d'attesa. Il ciclo di stampa inizia alla linea 4100, sotto il controllo della variabile X che scandisce tutti i 320 pixel dell'asse orizzontale.

Y, invece, rappresenta il numero di riga, sempre in pixel, di ogni punto che forma il grafico. Naturalmente il punto non viene stampato se cade all'esterno del video (linea 4110), altrimenti il compito è svolto dalla subroutine 9200 che calcola e va a modificare un byte nella *bit-map*.

Se due punti consecutivi non sono a diretto contatto le linee successive (4130-4150) forzano la stampa di altri punti in modo da colmare eventuali vuoti e dare un aspetto continuo alla curva. Se si proviene dalla seconda sezione si procede anche alla stampa della retta. Questa si ottiene utilizzando la stessa routine usata per la parabola ed anche la stessa equazione, dopo aver posto A = 0 (linea 4210); infatti, azzerando il coefficiente del termine di secondo grado l'equazione si riduce al primo e quindi può rappresentare analiticamente una retta.

La variabile flag RT viene posta uguale a 1 dopo la stampa della retta perché l'operazione non debba ripetersi più di una volta. Terminato il grafico si torna nel modo testo tramite la subroutine 9300, richiamata dalla linea 4240, dopo di che è possibile tracciare nuovamente il grafico con un altro fattore di scala. L'unità di misura viene scelta all'interno della subroutine 9700 (linea 9770) e memorizzata nella variabile V che compare, infatti, nel calcolo delle coordinate dei punti che formano il grafico (vedi linea 4100).

L'ultima parte del programma è occupata dalle subroutine delle quali si è già parlato.

Per esse non verranno aggiunti ulteriori commenti. Il loro scopo è illustrato nelle REM che le precedono; inoltre alcune di esse seguono

procedure che sono esposte con maggiore dovizia di dettagli nelle appendici.

Proposte operative

Trovate l'equazione della parabola passante per i punti $A(-10, -2)$, $B(0,4)$, $C(10, -)$. A tale scopo selezionate il punto 3 del menù principale e inserite le coordinate dei punti.
La risposta sarà:

$y = -0.06 = x^2 + 4$

Il coefficiente di x^2, in forma frazionaria, risulta $-3/50$; il programma, tuttavia, dà sempre le risposte in forma decimale.
Proseguite con lo studio della parabola rispondendo y alla richiesta e passate quindi al grafico, ponendo U = 1.
Dopo la consueta attesa apparirà la parabola passante per i tre punti prescelti.

CAPITOLO QUATTRO

Ancora matematica

STUDIO DI UNA FUNZIONE E SUE DERIVATE

Lo studio di una funzione consiste nel determinare l'insieme di esistenza, nel trovare eventuali intersezioni con gli assi, nella ricerca degli asintoti, nel determinare gli intervalli dove essa è crescente o decrescente, nel calcolare massimi e minimi relativi nonché il valore in corrispondenza di alcuni valori della variabile x.
Il seguente programma si limita allo studio dei polinomi, cioè delle funzioni razionali aventi la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Esso è diviso in quattro sezioni: 1) calcolo di $y = f(x)$ per determinati valori di x; 2) calcolo delle derivate; 3) determinazione della retta tangente alla curva in un punto; 4) ricerca degli intervalli ove la funzione è crescente o decrescente e dei punti di massimo e minimo relativo.
La ricerca dei punti d'intersezione con l'asse x può essere svolta con il programma successivo.
Inizialmente bisogna indicare il grado del polinomio e i coefficienti delle potenze decrescenti della x; se manca un termine il corrispondente coefficiente è lo zero.
Alcune tecniche di programmazione, per calcolare il valore del polinomio, ricorrono all'algoritmo di Horner-Ruffini; in questa sede, per una più immediata comprensione, si è preferito procedere nel modo consueto sommando i prodotti di ogni coefficiente per la corrispondente potenza di x.

Per il calcolo della derivata in un punto si ricorre allo stesso metodo dopo aver trovato i coefficienti della funzione derivata. Come è noto vale la seguente relazione:

$$D\ ax^n = anx^{n-1}$$

In modo analogo si ricavano i coefficienti delle derivate di ordine superiore. Ad esempio:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 5x + 7 \\ f'(x) &= 6x - 5 \\ f''(x) &= 6 \end{aligned}$$

La derivata di una funzione in un punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva di equazione $y = f(x)$ nel punto di ascissa x_0. Per trovare l'equazione della retta tangente si calcola $f(x_0)$ e $f'(x_0)$; l'equazione richiesta risulta

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \times (x - x_0)$$

e in forma esplicita:

$$y = f'(x_0) \times x + f'(x_0) \times x_0 + f(x_0)$$

L'ultima sezione, nella quale vengono calcolati massimi e minimi relativi, è alquanto più complessa.
La ricerca viene effettuata all'interno di un intervallo definito dall'utente, a partire dall'estremo inferiore e per valori discreti ottenuti incrementando successivamente la x di una quantità dx, anch'essa definita dall'utente.
Il programma procede finché non si verifica una delle seguenti eventualità: 1) $f'(x) = 0$, cioè la derivata prima si annulla per un particolare valore di x; 2) le derivate, calcolate in due punti successivi, sono discordi. Nel primo caso, detto x_0 il punto in cui si annulla la derivata, si calcolano le derivate in ordine superiore fino a trovare quella che in x_0 non si annulla. Se quest'ultima è di ordine pari, in corrispondenza di x_0 c'è un massimo relativo se la derivata è negativa o un minimo relativo se è positiva; invece, se è di ordine dispari, in x_0 la funzione non ha né massimo né minimo.
Nel secondo caso, in cui varia il segno della derivata calcolata in due punti successivi, è evidente che tra questi deve esistere un punto x_0 in cui $f'(x_0) = 0$. Per trovare x_0 il programma utilizza la stessa subroutine per la ricerca nell'intervallo principale dopo aver posto gli estremi uguali a $x - dx$ e a x e fissato l'incremento uguale a un decimo del precedente.

Nuovamente, o si trova un punto x_0 tale che sia $f'(x_0) = 0$ oppure si trova un intervallo più piccolo (1/10 del precedente) in cui deve trovarsi x_0. Il procedimento viene ripetuto cinque volte fino a trovare la soluzione con una sufficiente approssimazione. Infatti, se l'incremento iniziale fosse uguale a 1, x_0 verrebbe calcolato con un'approssimazione a meno di un centomillesimo. Per aumentare la precisione è sufficiente aumentare il numero delle iterazioni.

```
10 REM      FUNZIONI RAZIONALI
20 REM ****************************
30 PRINT"■■■■■■■":POKE53280,6
40 PRINTTAB(8)"┌──────────────────────┐"
50 PRINTTAB(8)"|"SPC(20)"|"
60 PRINTTAB(8)"|  FUNZIONI RAZIONALI  |"
70 PRINTTAB(8)"|"SPC(20)"|"
80 PRINTTAB(8)"└──────────────────────┘"
90 FORT=1TO3000:NEXT
100 PRINT"■LA FUNZIONE DEVE ESSERE UN POLINOMIO"
110 PRINT"■ORDINATO SECONDO LE POTENZE DECRESCENTI"
120 PRINT"■DELLA VARIABILE."
130 INPUT"■■■GRADO DEL POLINOMIO";N
140 N=INT(ABS(N)):IFN<=10THEN160
150 PRINT"SPIACENTE, IL VALORE E' TROPPO ALTO.":GOTO130
160 PRINT"■SCRIVI I COEFFICIENTI DELLA VARIABILE.■"
170 FORJ=NTO0STEP-1:PRINT"■COEFF. DI X■■";STR$(J);"■= ";
180 INPUTA(J):NEXTJ
190 GOSUB5500
200 PRINTTAB(11)"■■■■■■CONFERMI? (Y/N)"
210 GETK$:IFK$=""THEN210
220 IFK$="Y"THEN500
230 IFK$="N"THEN100
240 GOTO210
500 PRINT"■■■■■■■■   PREMI:"
510 PRINT"■   1. PER IL VALORE DELLA FUNZIONE IN"
520 PRINT"      UN PUNTO."
530 PRINT"■   2. PER IL VALORE DELLA DERIVATA IN"
540 PRINT"      UN PUNTO."
550 PRINT"■   3. PER L'EQUAZIONE DELLA RETTA"
560 PRINT"      TANGENTE IN UN PUNTO."
570 PRINT"■   4. PER LO STUDIO DELLA FUNZIONE."
580 PRINT"■   5. PER FINIRE.■■■■"
590 GETK$:IFK$=""THEN590
600 SZ=ASC(K$)-48:IFSZ<1ORSZ>5THEN590
610 ONSZGOTO1000,2000,3000,4000,5000
1000 REM  VALORE DELLA FUNZIONE
1010 GOSUB5500
1020 PRINT"■■CALCOLO DEL VALORE  IN UN PUNTO."
1030 INPUT"■X  =";X:GOSUB6000
1040 PRINT"■F(X)  =";F(0)
1050 PRINT"■■■■  VUOI IL CALCOLO PER UN ALTRO PUNTO?"
1060 PRINTTAB(17)"(Y/N)"
1070 GETK$:IFK$=""THEN1070
1080 IFK$="Y"THEN1010
1090 IFK$="N"THEN500
1100 GOTO1070
2000 REM  DERIVATA
2010 GOSUB5500
2020 PRINT"■■CALCOLODELLA DERIVATA IN UN PUNTO."
2030 INPUT"X  =";X:GOSUB6500
2040 K=0
2050 K=K+1:IFK>NTHEN2160
2060 F(K)=0:GOSUB7000
```

```
2070 PRINT"■DERIVATA";K;":"
2080 PRINT"■     F";RIGHT$(STR$(K),LEN(STR$(K))-1);"(";X;") =";F(K);"■■■■"
2090 IFK=NTHEN2160
2100 PRINT" VUOI UNA DERIVATA DI ORDINE SUPERIORE?"
2110 PRINTTAB(17)"(Y/N)"
2120 GETK$:IFK$=""THEN2120
2130 IFK$="Y"THEN2050
2140 IFK$="N"THEN2160
2150 GOTO2120
2160 PRINT"■■ VUOI DERIVARE IN UN ALTRO PUNTO? (Y/N)"
2170 GETK$:IFK$=""THEN2170
2180 IFK$="Y"THEN2000
2190 IFK$="N"THEN500
2200 GOTO2170
3000 REM  TANGENTE
3010 GOSUB5500
3020 PRINT"■■CALCOLO DELLA RETTA TANGENTE IN UN PUNTO"
3030 INPUT"■X =";X:GOSUB6500
3040 K=1:F(K)=0
3050 GOSUB6000:GOSUB7000
3060 M=INT(100*F(1))/100
3070 Y1=INT(100*F(0))/100:Q=-M*X+Y1
3080 PRINT"■■LA RETTA TANGENTE NEL PUNTO DI ASCISSA"
3090 PRINT"X =";X;"E':"
3100 PRINTTAB(14)"■Y = ";
3110 IFM=0THEN3130
3120 PRINTSTR$(M);"X";:IFQ=0THENPRINT:GOTO3150
3130 IFQ>0THENPRINT"+";RIGHT$(STR$(Q),LEN(STR$(Q))-1):GOTO3150
3140 PRINT0
3150 PRINT"■■■■VUOI IL CALCOLO IN UN ALTRO PUNTO? (Y/N)"
3160 GETK$:IFK$=""THEN3160
3170 IFK$="Y"THEN3000
3180 IFK$="N"THEN500
3190 GOTO3160
4000 REM  STUDIO DELLA FUNZIONE
4010 GOSUB5500
4020 PRINT"■■■STUDIO DELLA FUNZIONE IN UN INTERVALLO."
4030 INPUT"■ESTREMO INFERIORE, X1=";X1
4040 INPUT"■ESTREMO SUPERIORE, X2=";X2
4045 IFX1>=X2THENPRINT"■ERRORE!":GOTO4030
4050 IN=X1:FI=X2
4060 PRINT"■■INDICA UN INCREMENTO PER LA VARIABILE X:"
4070 INPUT"INCREMENTO =";W
4080 X=IN:GOSUB6000
4090 F1=F(0):X=FI:GOSUB6000
4100 F2=F(0)
4110 GOSUB5500
4120 PRINT"■■PUNTO","FUNZIONE"
4130 PRINT"──────────────────────────────────"
4140 PRINTIN,F1
4150 X1=IN:X2=FI:DX=W:GOSUB8000
4160 IFS2=0THEN4190
4170 IFS1>0THENPRINT,"CRESCENTE":GOTO4190
4180 PRINT,"DECRESCENTE"
4190 PRINTFI,F2
4200 PRINT"──────────────────────────────────"
4210 PRINT"■■■■    PREMI UN TASTO PER CONTINUARE"
4220 GETK$:IFK$=""THEN4220
4230 GOTO500
5000 PRINT"■":POKE53280,14:END
5500 PRINT"■LA FUNZIONE E':■■■"
5510 PRINT"F(X) = ";
5520 IFN=0THENPRINTA(N):GOTO5600
5530 FORJ=NTO0STEP-1
5540 IFA(J)=0THEN5600
5550 IFA(J)>0THENPRINT"+";RIGHT$(STR$(A(J)),LEN(STR$(A(J)))-1);:GOTO5570
```

```
5560 PRINTSTR$(A(J));
5570 IFJ=0THEN5600
5580 PRINT"X";:IFJ=1THEN5600
5590 PRINT"■■";STR$(J);"■";
5600 NEXTJ:PRINT:RETURN
6000 F(0)=0
6010 FORJ=0TON:F(0)=F(0)+A(J)*X↑J:NEXT
6020 RETURN
6500 FORJ=0TON:B(J)=A(J):NEXT
6510 RETURN
7000 FORJ=0TON-K
7010 B(J)=B(J+1)*(J+1):F(K)=F(K)+B(J)*X↑J
7015 IFABS(F(K))<.5E-6THENF(K)=0
7020 NEXTJ:RETURN
8000 V=0
8005 K=1:F(1)=0:X=X1
8010 GOSUB6500:GOSUB7000
8020 S1=SGN(F(1)):IFS1=0THEN8100
8030 FORX=X1+DXTOX2STEPDX
8040 F(1)=0:GOSUB6500:GOSUB7000
8050 S2=SGN(F(1)):IFS2=0THEN8100
8060 IFS1<>S2THEN8310
8070 S1=S2
8080 NEXTX
8090 RETURN
8100 GOSUB6500
8110 FORK=1TON:F(K)=0:GOSUB7000
8120 IFK=1ORF(K)=0THEN8290
8230 IFK/2<>INT(K/2)THEN8300
8240 IFF(K)>0THEN8270
8250 PRINT,"CRESCENTE"
8260 PRINTX,"MASSIMO RELATIVO":GOTO8300
8270 PRINT,"DECRESCENTE"
8280 PRINTX,"MINIMO RELATIVO":GOTO8300
8290 NEXTK
8300 X1=X+W:X2=F1:DX=W:GOTO8005
8310 V=V+1:X1=X-DX:X2=X:DX=DX/10
8320 IFV>5THEN8340
8330 GOTO8005
8340 IFS1>0THEN8370
8350 PRINT,"DECRESCENTE"
8360 PRINTX,"MINIMO RELATIVO":GOTO8390
8370 PRINT,"CRESCENTE"
8380 PRINTX,"MASSIMO RELATIVO"
8390 V=0:GOTO8300
```

Come è ormai consuetudine, le prime istruzioni modificano il colore del bordo e stampano il titolo che rimane sullo schermo per tutta la durata del ciclo 90.

Le linee 100-180 accettano in input sia il grado del polinomio (N) sia i coefficienti dei suoi termini (A(J)). La subroutine 5500, richiamata alla riga 190, scrive in modo convenzionale la funzione perché l'utente possa controllarla e confermarla prima di procedere.

Le linee 500-610 stampano il menù; prendendo il codice ASCII del tasto premuto diminuito di 48, si deve ottenere un numero compreso tra 1 e 5 (variabile S2).

Le linee 1000-1100 calcolano il valore della funzione in un punto. Il calcolo vero e proprio viene svolto dalla subroutine 6000 e memorizzato nella variabile con indice F(0).

La successiva sezione (linee 2000-2200) calcola il valore della derivata in un punto X. La variabile K (linea 2050) serve come indice della variabile F(K) ed è convenzione in questo programma che F(1) sia la derivata prima, F(2) la derivata seconda ecc. Il calcolo effettivo viene svolto dalla subroutine 7000 dopo che la subroutine 6500 ha trasferito i coefficienti da A(J) a B(J). Il risultato viene stampato dalla linea 2080; la funzione RIGHT$ in essa presente serve a eliminare lo spazio tra la lettera F e il numero seguente. Successivamente si può avere una derivata di ordine superiore (linee 2100-2150) tornando all'istruzione 2050 dove si incrementa K e ancora derivare in un altro punto (linee 2160-2200) tornando all'inizio della stessa sezione.

Per trovare la retta tangente alla funzione in un punto X vengono calcolati il valore della funzione e della sua derivata nello stesso punto con le subroutine 6000 e 7000. Le linee 3060 e 3070 calcolano il coefficiente angolare della retta M e l'ordinata all'origine Q con l'approssimazione a meno di un centesimo.

Si osservi che il coefficiente M è fatto differire dal valore della derivata solo per un diverso grado di approssimazione. Lo studio della funzione in un intervallo inizia con la richiesta degli estremi X1 e X2 (linee 4030-4040). Lo studio avviene per valori discreti della variabile indipendente ottenuti con un incremento definibile da programma (variabile W). Le variabili IN e FI (linea 4050) salvano gli estremi dell'intervallo poiché X1 e X2 vengono cambiate nel corso del programma. Le linee 4140-4230 preparano lo schermo con l'intestazione e scrivono i risultati. La ricerca dei massimi e dei minimi relativi è svolta dalla subroutine 8000 che merita un esame approfondito. In essa la linea 8005 inizializza alcune variabili prima di trasferire i coefficienti dalla matrice A(J) alla B(J) (subroutine 6500) e di calcolare il valore della derivata nel punto X, inizialmente coincidente con l'estremo inferiore dell'intervallo.

L'istruzione 8020 indaga se la derivata si annulla in X perché in questo caso si passa alla linea 8100 per il calcolo delle derivate di ordine superiore. Nella parte generale che precede il listato è descritto il metodo per determinare la presenza di massimi e minimi relativi studiando le derivate di ordine superiore.

Alla linea 8030 inizia il ciclo per studiare la funzione incrementando la variabile X di una quantità DX, inizialmente posta uguale a W (linea 4150). S1 (linea 8020) e S2 (linea 8050) contengono il segno della derivata in due punti successivi. Se la derivata è positiva la funzione è crescente, se è negativa la funzione è decrescente. È evidente che la variazione di segno nella derivata indica la presenza di un massimo o minimo relativo all'interno dell'intervallo di ampiezza DX. Quando ciò si verifica il piccolo intervallo viene esplorato incremen-

tando la variabile indipendente con un valore uguale a un decimo del precedente, cioè DX = DX/10 (linea 8310).
Il procedimento viene ripetuto più volte sotto il controllo della variabile-contatore V; se la linea 8050 non avrà rivelato che si è annullata la derivata in qualche punto, dopo cinque ripetizioni, lavorando su intervalli sempre più piccoli, il programma riterrà ugualmente di aver trovato il punto con sufficiente approssimazione.
Le variabili X1 e X2 indicano sempre gli estremi dell'intervallo sul quale si sta lavorando e DX è l'incremento utilizzato in un particolare momento.
Dopo aver trovato un punto di massimo o minimo relativo, il programma riprende ripristinando i giusti valori nelle variabili X1, X2 e DX (linea 8300) e continuando la ricerca all'interno dell'intervallo principale (ciclo 8030-8080).
Si riporta un esempio di utilizzazione del programma.

```
LA FUNZIONE E':
        3     2
F(X)=+4X -72X +324X

CALCOLO DEL VALORE IN UN PUNTO.
X =? 3
F(X) = 432

VUOI IL CALCOLO IN UN ALTRO PUNTO? (Y/N)



LA FUNZIONE E':
        3     2
F(X)=+4X -72X +324X

STUDIO DELLA FUNZIONE IN UN INTERVALLO.

ESTREMO INFERIORE, X1 =? 0
ESTREMO SUPERIORE, X2 =? 10

INDICA UN INCREMENTO PER LA VARIABILE X:
INCREMENTO =? .5

PUNTO          FUNZIONE
-------------------------------
  0             0
                CRESCENTE
  3             MASSIMO RELATIVO
                DECRESCENTE
  9             MINIMO RELATIVO
                CRESCENTE
 10             40.000001
-------------------------------
```

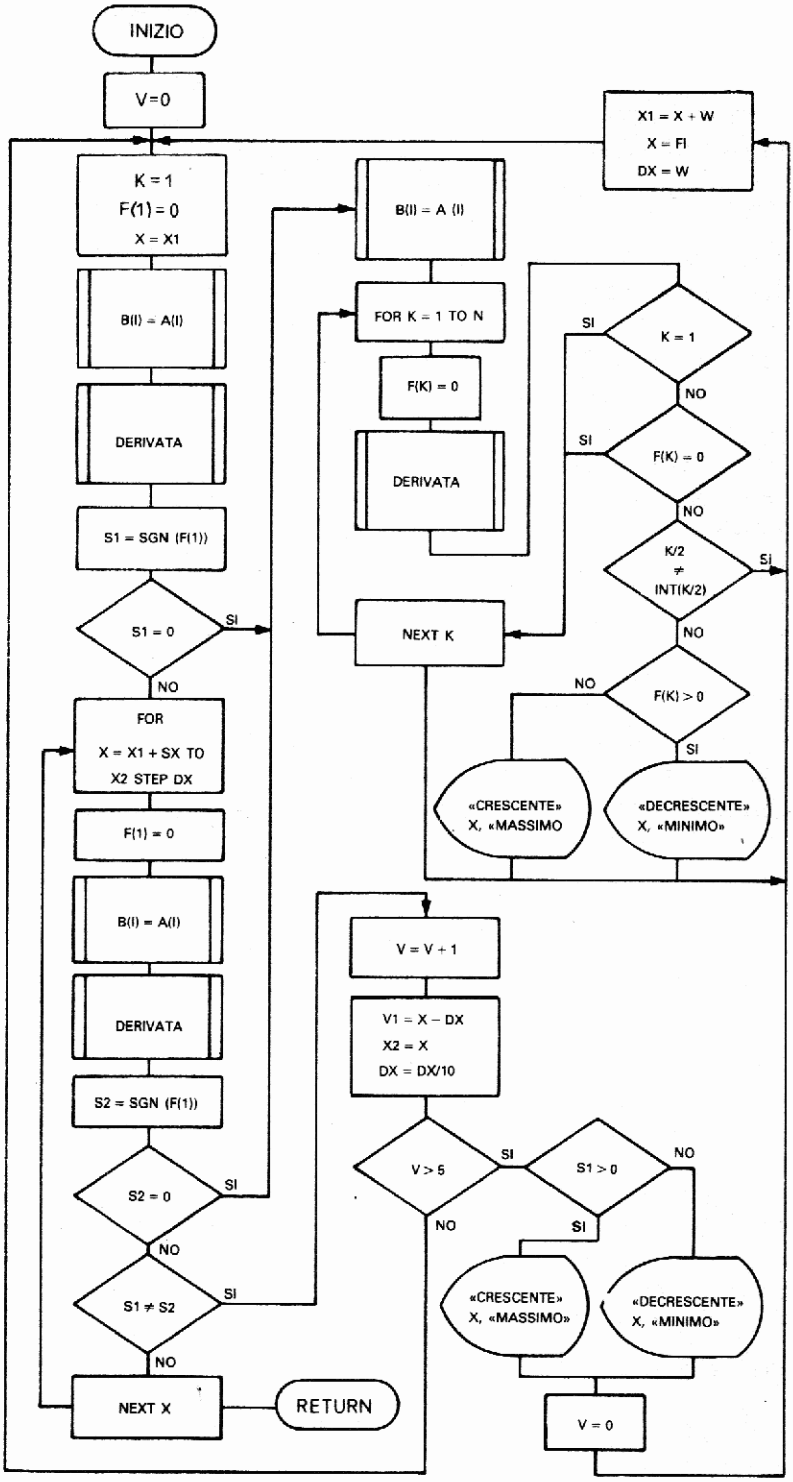

INIZIO
V=0
K = 1
F(1) = 0
X = X1
B(I) = A(I)
DERIVATA
S1 = SGN (F(1))
S1 = 0
SI
NO
FOR
X = X1 + SX TO
X2 STEP DX
F(1) = 0
B(I) = A(I)
DERIVATA
S2 = SGN (F(1))
S2 = 0
SI
NO
S1 ≠ S2
SI
NO
NEXT X
RETURN
B(I) = A (I)
FOR K = 1 TO N
F(K) = 0
DERIVATA
NEXT K
X1 = X + W
X = FI
DX = W
K = 1
SI
NO
F(K) = 0
SI
NO
K/2
≠
INT(K/2)
SI
NO
F(K) > 0
NO
SI
«CRESCENTE»
X, «MASSIMO
«DECRESCENTE»
X, «MINIMO»
V = V + 1
V1 = X – DX
X2 = X
DX = DX/10
V > 5
SI
NO
S1 > 0
NO
SI
«CRESCENTE»
X, «MASSIMO»
«DECRESCENTE»
X, «MINIMO»
V = 0

Fig. 7

SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE INTERE

Le equazioni algebriche intere sono quelle equazioni che possono essere espresse nella forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Convenzionalmente il grado massimo è stato posto uguale a 20.
Il programma fornisce, solo se esistono, le soluzioni reali dell'equazione.
I metodi adottati differiscono al variare del grado dell'equazione. Se il grado è 1, l'equazione è del tipo $ax + b = 0$ e la soluzione è $x = -b/a$. Se l'equazione è di secondo grado è del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ e il suo determinante è $D = b^2 - 4ac$. Se risulta $D < 0$ l'equazione non ammette soluzioni reali; se $D = 0$, ammette due soluzioni coincidenti; infine, se $D > 0$ esistono due soluzioni distinte date dalle formule:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se il grado dell'equazione è maggiore di 2 si segue il metodo di Newton. Questo consiste in una serie di successive approssimazioni. Nella figura 8 vengono mostrati il grafico di una generica funzione $f(x)$

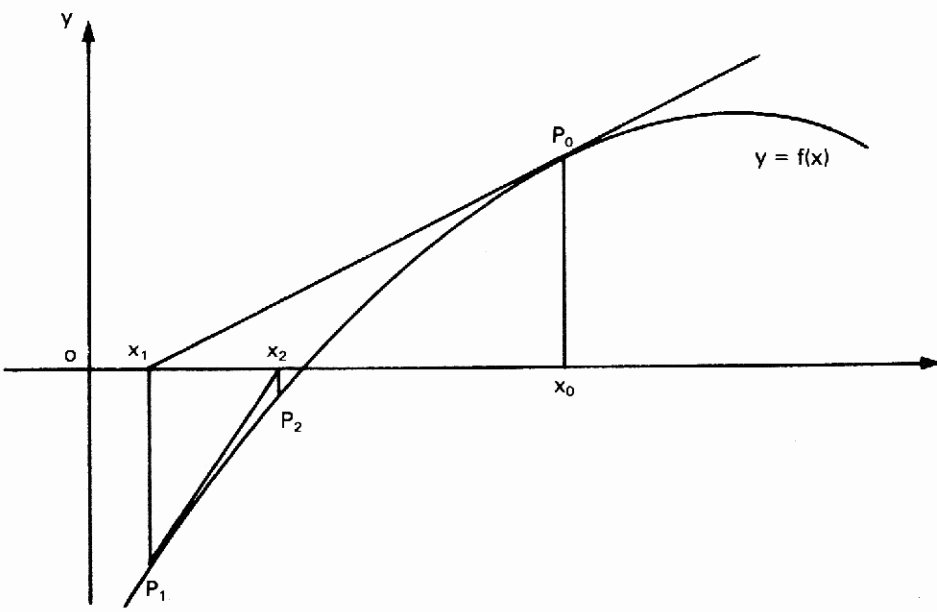


Fig. 8

e una retta tangente alla curva del punto P_0 di ascissa x_0. La derivata della funzione nel punto P_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente. Detto x_1 il punto di intersezione della tangente con l'asse delle x, è $f'(x_0) = f(x_0) / (x_0 - x_1)$ e da qui si ricava il valore di x_1:

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$$

Il metodo consiste nell'assumere x_1 come approssimazione della radice reale r e da questo calcolare il valore x_2 in modo del tutto analogo:

$$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$$

Poi il valore di x_3 e così via, fino a trovare la soluzione con l'approssimazione desiderata. Generalmente bastano poche iterazioni per trovare una soluzione.
Nell'eventualità che sia $f'(x_0) = 0$ la tangente non ha intersezioni con l'asse delle x, a meno che non sia anche $f(x_0) = 0$, e il programma è fornito di una funzione random per fissare un nuovo punto di partenza per le iterazioni.
In ogni caso, trovata una radice reale r dell'equazione, detto $P(x)$ il polinomio al primo membro dell'eguaglianza, deve essere $P(x) = Q(x) \times (x - r)$ e si può procedere al calcolo dei coefficienti del nuovo polinomio $Q(x)$ con la regola di Ruffini. Per esempio, data l'equazione $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ e trovata con il metodo di Newton la soluzione $x = 2$, applicando la regola di Ruffini si trovano i coefficienti del polinomio quoziente $Q(x)$.

	1	−4	1	6
2		2	−4	−6
	1	−2	−3	0

Le soluzioni dell'equazione di secondo grado $x^2 - 2x - 3 = 0$ sono anche soluzione dell'equazione di terzo grado data inizialmente. Ogni volta che viene individuata una radice dell'equazione è possibile scrivere un'equazione di grado immediatamente inferiore. Il programma utilizza il metodo di Newton per trovare soluzioni e per abbassare conseguentemente il grado dell'equazione finché non si arriva al secondo, dopo di che si usano le formule per la soluzione di equazioni di secondo grado.
Un breve commento merita ancora il modo in cui viene trovato il valore del polinomio nella routine 4100.
L'algoritmo utilizzato è quello di Horner-Ruffini che, per quanto me-

no familiare, consente al computer un calcolo più veloce con un minor numero di istruzioni.
Il polinomio:

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a,\ x = a_0$$

può essere scritto nella forma:

$$((((a_n x + a_{n-1})x + \ldots)x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

Per calcolare il valore del polinomio per $x = x_0$, si definiscono i seguenti numeri:

$$K_0 = a_n$$
$$K_1 = K_0 x_0 + a_{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$K_{n-1} = K_{n-2} x_0 + a_1$$
$$K_n = K_{n-1} x_0 + a_0$$

risulta

$$P(x_0) = K_n$$

In modo del tutto analogo viene calcolato il valore della derivata nel punto x_0.

```
10 REM        SOLUZIONE DELLE
20 REM      EQUAZIONI ALGEBRICHE
30 REM ******************************
40 PRINT"□":POKE53280,6
50 PRINTTAB(8)"┌──────────────────────────┐"
60 PRINTTAB(8)"|   SOLUZIONE  DELLE    |"
70 PRINTTAB(8)"| EQUAZIONI ALGEBRICHE |"
80 PRINTTAB(8)"└──────────────────────────┘"
90 PRINT"     PREMI UN TASTO QUALSIASI PER CONTINUARE."
100 GETA$:IFA$=""THEN100
110 PRINT"□"
120 PRINT"IL PROGRAMMA PERMETTE LA SOLUZIONE DI"
130 PRINT"EQUAZIONI AVENTI LA FORMA:  "
140 PRINT"       N       N-1            2"
150 PRINT"    A X +A    X    + ... +A X +A X+A =0"
160 PRINT"     N     N-1              2     1    0  "
170 INPUT"GRADO DELL'EQUAZIONE";G:G=ABS(INT(G))
180 IFG>0THEN210
190 PRINT"IL GRADO DEVE ESSERE MAGGIORE DI ZERO"
200 FORT=1TO2000:NEXT:PRINT"□                                    □□":GOTO170
210 IFG<=10THEN240
220 PRINT"IL GRADO NON PUO' ESSERE MAGGIORE DI 10"
230 FORT=1TO2000:NEXT:PRINT"□                                    □□":GOTO170
240 PRINT"SCRIVI I COEFFICIENTI DELLE POTENZE"
250 PRINT"DECRESCENTI DELLA X."
```

```
260 PRINT"IN MANCANZA DI UN TERMINE, PONI A=0.■"
270 FORI=GTO0STEP-1:PRINT"A";RIGHT$(STR$(I),LEN(STR$(I))-1);" = ";
280 INPUTA(I):NEXT
290 IFA(G)<>0THEN300
295 PRINT"C'E' UN ERRORE! RIPETI PER FAVORE.■■"
296 FORT=1TO3000:NEXT:GOTO110
300 PRINT"■■L'EQUAZIONE DI";G;"□■O■ GRADO E':■■"
310 FORI=GTO0STEP-1:IFA(I)=0THEN400
315 IFA(I)=-1THENPRINT"-";:GOTO345
316 IFA(I)=1ANDI=GTHEN345
320 IFA(I)<0ORI=GTHENC$=STR$(A(I)):GOTO340
330 IFA(I)=1ANDI<>0THENPRINT"+";:GOTO345
335 C$="+"+RIGHT$(STR$(A(I)),LEN(STR$(A(I)))-1)
340 PRINTC$;
345 IFI=0THEN400
350 PRINT"X";:IFI=1THEN400
360 E$=STR$(I):PRINT"□";RIGHT$(E$,LEN(E$)-1);"■";
400 NEXT
410 PRINT"=0■■":N=G
420 IFN=1THEN450
430 IFN=2THEN500
440 GOTO1000
450 PRINT"LA SOLUZIONE E':"
460 PRINT"■■ X =";
465 L1=LEN(STR$(A(0))):L2=LEN(STR$(A(1)))
470 IFL1>L2THENLL=L1:GOTO480
475 LL=L2
480 PRINTTAB(5+LL-L1);"□";-A(0)
485 FORJ=1TOLL:PRINTTAB(4+J);"—";:NEXT
486 PRINT" =";-A(0)/A(1)
490 PRINTTAB(5+LL-L2);A(1):GOTO5000
500 IFA(0)=0THEN800
510 GOSUB4000:GOSUB4300
520 IFD=0THEN550
530 IFD>0THEN700
540 PRINT"■■L'EQUAZIONE NON AMMETTE RADICI REALI.":GOTO5000
550 PRINT"■■L'EQUAZIONE AMMETTE 2 RADICI COINCIDENTI"
570 PRINT"■■ X1 = X2 =";
580 L1=LEN(STR$(B(1))):L2=LEN(STR$(B(2)))
590 IFL1>L2THENLL=L1:GOTO610
600 LL=L2
610 PRINTTAB(11+LL-L1);"□";-B(1)
620 FORJ=1TOLL:PRINTTAB(10+J);"—";:NEXT
630 PRINT" =";X1
640 PRINTTAB(11+LL-L2);2*B(2)
650 GOTO5000
700 PRINT"■■L'EQUAZIONE AMMETTE DUE RADICI DISTINTE"
710 L1=LEN(STR$(D))-1:L2=LEN(STR$(B(1))):L3=LEN(STR$(2*B(2)))
720 IF3+L1+L2>L3THENLL=3+L1+L2:GOTO740
730 LL=L3
740 FORJ=1TO2:PRINT"■■■ X";RIGHT$(STR$(J),1);"=";
750 PRINT"□";-B(1);:IFJ=1THENPRINT"—";:GOTO770
760 PRINT"+";
770 PRINT"↘ □";:PRINT"■■";
780 FORI=1TOL1:PRINT"—";:NEXT:PRINT
790 PRINTTAB(8+L2);RIGHT$(STR$(D),L1)
800 FORI=1TOLL:PRINTTAB(4+I);"—";:NEXT
810 IFJ=1THENPRINT" =";X1:GOTO830
820 PRINT" =";X2
830 PRINTTAB(6);2*B(2):NEXTJ
840 GOTO5000
1000 CT=0:GOSUB4000
1010 CT=CT+1
1020 IFB(0)<>0THEN1100
1030 R(CT)=0:XX=0:GOSUB4400
1040 IFN<>2THEN1010
```

```
1050 GOSUB4300
1060 IFD<0THEN1500
1070 CT=CT+1:R(CT)=X1
1080 CT=CT+1:R(CT)=X2
1030 GOTO1500
1100 X0=0
1110 GOSUB4200:IFP=0THEN1200
1120 IFP1=0THEN1250
1130 IFT>50THEN1400
1140 PRINT"■■■SPIACENTE NON RIESCO A TROVARE SOLUZIONI"
1150 PRINT"□QUASI CERTAMENTE L'EQUAZIONE NON AMMETTE"
1160 PRINT"□RADICI REALI.■■■":GOTO5000
1200 R(CT)=X0:XX=X0:GOSUB4400
1210 IFN=2THEN1050
1220 GOTO1010
1250 IX=INT(RND(1)*10)+1
1260 IFIX/2=INT(IX/2)THENX0=X0+IX:GOTO1280
1270 X0=X0-IX
1280 VT=VT+1:IFVT<3THEN1110
1290 PRINT"SONO IN DIFFICOLTA', PER FAVORE INDICA"
1300 PRINT"UN VALORE DELLA X DAL QUALE POSSA"
1310 PRINT"CERCARE UNA SOLUZIONE."
1320 PRINT"SE NON VUOI PROSEGUIRE SCRIVI 9999."
1330 INPUT"X =";X0:PRINT"■■":VT=0
1340 IFX0=9999THEN1140
1350 GOTO1020
1400 X0=X:GOSUB4100
1410 IFABS(P)>1E-10THEN1250
1420 AP=1:R(CT)=X0:XX=X0
1430 GOSUB4400:GOTO1040
1500 IFAP=1THENPRINT"SOLUZIONIAPPROSSIMATE:■":GOTO1520
1510 PRINT"SOLUZIONI:■"
1520 FORI=1TOCT
1530 PRINT"X";RIGHT$(STR$(I),LEN(STR$(I))-1);" =";R(I)
1540 NEXTI:PRINT"■■":GOTO5000
3970 REM
3980 REM      DA A(I) A B(I)
3990 REM
4000 FORI=0TON:B(I)=A(I):NEXT
4010 RETURN
4070 REM
4080 REM    VALORE POLINOMIO E DERIVATA
4090 REM
4100 P=B(N):P1=0
4110 FORI=N-1TO0STEP-1
4120 P1=P1*X0+P:P=P*X0+B(I)
4130 NEXT
4140 RETURN
4170 REM
4180 REM    METODO DI NEWTON
4190 REM
4200 T=0
4210 T=T+1:IFT>50THEN4260
4220 GOSUB4100:IFP=0ORP1=0THEN4260
4230 X=X0-P/P1
4240 REM QUI SI PUO' STAMPARE X0 E P
4250 X0=X:GOTO4210
4260 RETURN
4270 REM
4280 REM  SOLUZIONE EQ. DI SECONDO GR.
4290 REM
4300 D=B(1)↑2-4*B(2)*B(0):IFD<0THEN4350
4310 X1=(-B(1)-SQR(D))/(2*B(2))
4320 X2=(-B(1)+SQR(D))/(2*B(2))
4330 IFINT(X1)+1-X1<1E-06THENX1=INT(X1)+1
4340 IFINT(X2)+1-X2<1E-06THENX2=INT(X2)+1
4350 RETURN
```

```
4370 REM
4380 REM   COEFF. POLINOMIO QUOZIENTE
4390 REM
4400 FORI=N-1TO0STEP-1
4410 B(I)=B(I)+B(I+1)*XX
4420 NEXT
4430 N=N-1
4440 FORI=0TON:B(I)=B(I+1):NEXT
4450 RETURN
5000 PRINTTAB(8)"■■VUOI CONTINUARE? (Y/N)"
5010 GETA$:IFA$=""THEN5010
5020 IFA$="Y"THEN110
5030 IFA$="N"THENPRINT"■":END
5040 GOTO5010
```

Il programma inizia con il titolo (linee 40-100) e con la scrittura di una generica equazione algebrica (linee 110-160). La successiva istruzione INPUT accetta il grado del polinomio e lo memorizza nella variabile G. Per precauzione si usano le funzioni ABS e INT qualora l'utente, per qualche motivo poco giustificabile, indicasse un grado negativo o frazionario (linea 170). Altre istruzioni controllano che G sia superiore allo zero ma non superiore a dieci inviando, in caso contrario, opportuni messaggi (linee 180-230).
Più avanti il ciclo 270-280 accetta i coefficienti della variabile X memorizzandoli nella variabile con indice A( ).
Le linee 300-410 stampano l'equazione nel modo consueto; in particolare l'istruzione 360 stampa gli esponenti della variabile X usando il controllo del cursore tra virgolette.
Il programma trasferisce il grado del polinomio nella variabile di lavoro N e distingue i casi particolari in cui N sia uguale a 1 o a 2 che consentono una soluzione più immediata.
Le linee 450-490 stampano la soluzione di un'equazione di primo grado in forma frazionaria, con il numeratore, la linea di frazione e il denominatore uno sull'altro scrivendo poi a fianco anche il valore decimale. L1 e L2 rappresentano la lunghezza dei termini della frazione e LL la lunghezza della linea di frazione.
Le linee 500-840 risolvono un'equazione di secondo grado. Le subroutine, richiamate dalla linea 510, trasferiscono i coefficienti nella matrice di lavoro B( ) e calcolano il discriminante.
In base al valore di quest'ultimo, le istruzioni 520-530 trasferiscono il controllo alle linee 540, 550 e 700 per la stampa delle soluzioni.
La riga 770 stampa il segno di radice; dopo il segno corrispondente al cursore a sinistra ed unito ad esso nel listato, c'è il carattere grafico numero 79 che in quella posizione potrebbe essere confuso con quello avente codice 99. Come in precedenza, la presentazione dei risultati poteva essere molto più semplice se non fosse stata posta particolare cura all'aspetto formale con il dichiarato intento di ottenere una scrittura più chiara e più vicina a quella convenzionalmente usata in matematica. Alla linea 1000 inizia la soluzione di un'equazione di grado

superiore al secondo; la variabile CT è un contatore che indica il numero di soluzioni trovate che vengono memorizzate nel vettore RT( ). La linea chiama anche la subroutine 4000 dove i coefficienti vengono trasferiti nel vettore di comodo B( ) che verrà usato per l'elaborazione.
La linea 1020 indaga se il termine noto è diverso da zero perché nel caso sia nullo una soluzione dell'equazione è lo zero (linea 1030), dopodiché si può abbassare di grado l'equazione chiamando la subroutine 4400 e procedere con l'elaborazione.
Se dopo l'abbassamento il polinomio dovesse risultare di secondo grado le ultime due radici vengono trovate con la subroutine 4300, a condizione che il discriminante non sia negativo.
Nel caso più generale una soluzione dell'equazione viene individuata con il metodo di Newton. Alla linea 1110, infatti, viene chiamata la subroutine 4200 dopo aver convenzionalmente posto X0 = 0. In essa si calcola il valore P del polinomio al primo membro dell'equazione e quello della sua derivata P1 nel punto X0. Da questi dati si ricava X = X0 – P/P1 (linea 4230) e, dopo aver posto X0 = X, si ripete il ciclo. Questo termina in uno dei seguenti casi: (1) si sono effettuate più di 50 iterazioni, infatti generalmente ne bastano una decina; (2) il polinomio si azzera in X0, nel qual caso è P = 0; (3) la derivata si annulla in X0. Queste condizioni vengono valutate alle linee 1110-1130. Se il programma non riesce a trovare una soluzione viene scelto casualmente un altro punto dal quale iniziare casualmente la ricerca (linee 1250-1270) e, se l'esito è ancora negativo, si chiede all'utente di esprimere un valore dal quale iniziare (linee 1290-1330). Questo numero dovrà essere prossimo ad una presunta radice dell'equazione.
Dopo che il metodo di Newton è stato eseguito per più di 50 iterazioni senza trovare un valore nel quale il polinomio si annulla, se il risultato, in valore assoluto, è inferiore a 10^{-10}, X0 viene considerata una soluzione approssimata dell'equazione (istruzione IF THEN alla linea 1410).
La stampa di tutte le soluzioni trovate è svolta dalle linee 1500-1540.
L'ultima parte del listato è occupata dalla subroutine già citata e il cui significato è reso esplicito dalle REM che la precedono.

DETERMINANTI E SOLUZIONI DI SISTEMI LINEARI

Non a caso i due argomenti sono stati associati, infatti una soluzione di sistemi lineari viene eseguita ricorrendo alla regola di Cramer che prevede l'uso dei determinanti.
Per evitare inutili ripetizioni, è buona norma utilizzare una stessa routine per svolgere funzioni diverse.

Un determinante di secondo ordine si indica col simbolo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ed è uguale al numero $a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$
Gli indici della lettera a si riferiscono il primo alla riga e il secondo alla colonna.
Dato un determinante di terzo ordine, si dice complemento algebrico di un suo elemento il determinante di secondo ordine che si ottiene dal primo eliminando la riga e la colonna relative all'elemento stesso, preceduta dal segno più o meno, a seconda che sia pari o dispari la somma degli indici.
Il determinante è uguale alla somma degli elementi di una riga per i rispettivi complementi algebrici.
La medesima definizione può essere estesa a determinanti di ordine superiore.
Il programma permette di risolvere determinanti di qualsivoglia ordine n, con $n \leqslant 10$; nulla vieta, tuttavia, di dimensionarlo diversamente, aggiungendo l'istruzione DIM (per $n \leqslant 10$ l'istruzione non è necessaria) e modificando le linee di protezione dopo l'input del numero N.
La tecnica di programmazione è originale.
Sia N l'ordine del determinante, si definisce K = N − 2, e, utilizzando la stessa routine del programma sulle disposizioni (si veda il capitolo 5), si creano le disposizioni semplici con gli N indici di colonna, presi a K a K. Gli indici di colonna oggetti di ogni disposizione, vengono associati agli indici di riga 1, 2, 3 ... K, vengono quindi moltiplicati tra loro gli elementi del determinante con quegli indici di riga e di colonna; tale prodotto viene ancora moltiplicato per il determinante del secondo ordine che si ottiene con gli elementi delle ultime 2 righe, $N-1$ e N, e aventi numero di colonna diversi da quelli che compaiono come oggetti della disposizione semplice. Il prodotto degli elementi associati agli oggetti di ogni disposizione semplice e del determinante di secondo ordine, costituisce un addendo che concorre al calcolo del determinante; tali addendi vengono presi alternativamente con il segno più e meno; il loro numero è uguale al numero delle disposizioni semplici che si ottengono con N oggetti presi a K a K.
Un esempio pratico chiarirà meglio l'algoritmo seguito. Sia dato il seguente determinante del quarto ordine:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

È $N = 4$ e $K = N - 2 = 2$; il numero delle disposizioni semplici è $D_{4,2} = 4 \times 3 = 12$ e, prendendo come oggetti gli indici di colonna, esse sono: 1,2; 1,3; 1,4; 2,1; 2,3; 2,4 ecc. Di ogni coppia, il primo indice di colonna viene associato al numero di riga 1 e il secondo al numero di riga 2. Data la prima disposizione (1,2) vengono individuati gli elementi $a_{11} = 2$ e $a_{22} = 2$ e successivamente il determinante di secondo ordine formato dalle ultime due righe e dalle colonne con indice diverso da 1 e 2, cioè 3 e 4; esso è

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

e viene calcolato nel modo consueto dando il risultato -10.
Il primo addendo sarà pertanto: $2 \times 2 \times (-10) = -40$.
La seconda disposizione è (1,3), corrispondente agli elementi del determinante $a_{11} = 2$ e $a_{23} = 3$; il determinante del secondo ordine è formato dalle ultime due righe e dalle colonne con indice diverso da 1 e 3, cioè 2 e 4. Esso è

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 5.$$

Il secondo addendo, ricordando che essi vengono presi alternativamente col segno più e meno, è $-2 \times 3 \times 5 = -30$.
Ripetendo il procedimento per le 12 disposizioni, si ottengono 12 prodotti la somma dei quali dà il valore del determinante. Il tempo di elaborazione è di circa un secondo per ogni ciclo; di conseguenza un determinante di quarto ordine richiede per il calcolo circa dodici secondi.
I sistemi lineari sono risolti ricorrendo alla regola di Cramer. I coefficienti delle n incognite formano un determinante di ordine n che viene detto determinante del sistema, il quale si suppone sia diverso da zero.
Sostituendo i termini noti, rispettivamente, ai coefficienti di ogni incognita, si ottengono i determinanti $D_1, D_2, \ldots D_n$.
La soluzione del sistema è:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad , \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

Il programma, utilizzando la routine per la soluzione dei determinanti, fornisce la soluzione del sistema in forma frazionaria, dove i termini

delle frazioni sono proprio i valori dei determinanti sopra definiti; eventualmente le stesse frazioni sono ridotte ai minimi termini.

```
10 REM DETERMINANTI E SOLUZIONI
20 REM     DI SISTEMI LINEARI
30 REM ************************
40 PRINT"■■■■■■■■■■":POKE53280,6
50 PRINTTAB(6)"┌──────────────────────────────┐"
60 PRINTTAB(6)"│"SPC(26)"│"
70 PRINTTAB(6)"│ DETERMINANTI E SOLUZIONI │"
80 PRINTTAB(6)"│"SPC(26)"│"
90 PRINTTAB(6)"│     DI SISTEMI LINEARI     │"
100 PRINTTAB(6)"│"SPC(26)"│"
110 PRINTTAB(6)"└──────────────────────────────┘"
120 PRINT"■■■■■■■■ -PREMI UN TASTO QUALSIASI PER INIZIARE-"
130 GETK$:IFK$=""THEN130
200 PRINT"■■■■■■■■■■PREMI:"
210 PRINT"■1. PER CALCOLARE UN DETERMINANTE."
220 PRINT"■2. PER RISOLVERE UN SISTEMA LINEARE."
230 PRINT"■3. PER FINIRE."
240 GETK$:IFK$=""THEN240
250 IFK$="1"THEN1000
260 IFK$="2"THEN2000
270 IFK$="3"THEN3000
280 GOTO240
1000 REM  DETERMINANTE
1010 PRINT"■"TAB(8)"_____________________________"
1020 PRINTTAB(8)"■ *** DETERMINANTI *** ■"
1030 PRINT"■■SCRIVI L'ORDINE DEL DETERMINANTE (NK=10)"
1040 INPUT"N =";N:N=INT(ABS(N))
1050 IFN>0ANDN<=10THEN1070
1060 PRINT"■VALORE NON AMMESSO! RIPETI.■":GOTO1040
1070 PRINT"■SCRIVI RIGA PER RIGA GLI ELEMENTI DEL"
1080 PRINT"DETERMINANTE."
1090 FORI=1TON:PRINT"■RIGA";I;
1100 FORJ=1TON:PRINTTAB(10)"COLONNA";J;"=";:INPUTA(I,J)
1110 NEXTJ:NEXTI
1120 PRINTTAB(8)"■■- CONFERMI? (Y/N) -"
1130 GETK$:IFK$=""THEN1130
1140 IFK$="Y"THEN1170
1150 IFK$="N"THEN1000
1160 GOTO1130
1170 IFN=1THENDM=A(1,1):GOTO1200
1180 IFN=2THENDM=A(1,1)*A(2,2)-A(2,1)*A(1,2):GOTO1200
1190 GOSUB4000
1200 PRINT"■IL VALORE DEL DETERMINANTE E':"
1210 PRINTTAB(17-LENSTR$(DM))"■■D =";DM
1220 GOTO3500
2000 REM  SISTEMA LINEARE
2010 PRINT"■ _____________________________________"
2020 PRINT" ■ * SOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE * ■"
2030 PRINT"■■SCRIVI IL NUMERO DI EQUAZIONI CHE FORMA-"
2040 PRINT"■NO IL SISTEMA.■"
2050 INPUT"N (NK=10) =";N:N=INT(ABS(N))
2060 IFN>0ANDN<11THEN2080
2070 PRINT"■VALORE NON CONSENTITO, RIPROVA.■":GOTO2050
2080 PRINT"■PER OGNI EQUAZIONE SCRIVI ORDINATAMENTE"
2090 PRINT"I COEFFICIENTI ED I TERMINI NOTI."
2100 FORI=1TON:PRINT"■EQUAZIONE";I
2110 FORJ=1TON:PRINT"   COEFFICIENTE DI X";RIGHT$(STR$(J),LEN(STR$(J))-1);
2120 INPUT" =";A(I,J)
2130 NEXTJ:INPUT"   TERMINE NOTO =";H(I)
2140 NEXTI
```

```
2150 PRINTTAB(10)"■■■■ CONFERMI? (Y/N) -"
2160 GETK$:IFK$=""THEN2160
2170 IFK$="Y"THENPRINT"■":GOTO2195
2180 IFK$="N"THEN2000
2190 GOTO2160
2195 PRINTTAB(9)"_____"
2196 PRINTTAB(9)"■ *** SOLUZIONI *** ■■■"
2200 IFN<>1THEN2250
2210 IFA(1,1)<>0THEN2230
2220 PRINT"L'EQUAZIONE NON E' DETERMINATA.■■■■":GOTO3500
2230 NU=H(1):DE=A(1,1):GOSUB4500
2240 DX=H(1):DS=A(1,1):G=1:GOSUB5000:GOTO3500
2250 IFN<>2THEN2350
2260 DS=A(1,1)*A(2,2)-A(2,1)*A(1,2)
2270 IFDS<>0THEN2290
2280 PRINT"IL SISTEMA NON E' DETERMINATO.■■■■":GOTO3500
2290 DX=H(1)*A(2,2)-H(2)*A(1,2)
2300 NU=DX:DE=DS:GOSUB4500
2310 G=1:GOSUB5000
2320 DX=A(1,1)*H(2)-A(2,1)*H(1)
2330 NU=DX:DE=DS:GOSUB4500
2340 G=2:GOSUB5000:GOTO3500
2350 FORI=1TON:FORJ=1TON
2360 CF(I,J)=A(I,J)
2370 NEXTJ:NEXTI:GOSUB4000
2380 IFDM=0THEN2280
2390 DS=DM
2400 FORG=1TON
2410 FORJ=1TON:A(J,G)=H(J):NEXTJ
2420 GOSUB4000
2430 DX=DM:NU=DX:DE=DS:GOSUB4500:GOSUB5000
2440 FORJ=1TON:A(J,G)=CF(J,G):NEXTJ
2450 NEXTG:GOTO3500
3000 PRINT"■":POKE53280,14:END
3500 PRINT"■■■■PREMI UN TASTO QUALSIASI PER CONTINUARE.■"
3510 GETK$:IFK$=""THEN3510
3520 GOTO200
4000 DM=0:K=N-2:N1=N-1:D=N
4010 FORI=1TOK-1:D=D*(N-I):NEXT
4020 FORI=3TON:CT(I)=1:P(I)=N+1-I:NEXT
4030 S=1
4040 FORCN=1TOD:F=1
4050 FORR=1TOK:C=P(N+1-R):F=F*A(R,C):NEXTR
4060 CD=1
4070 FORI=1TON:FORJ=3TON
4080 IFP(J)=ITHEN4110
4090 NEXTJ
4100 B(CD)=I:CD=2
4110 NEXTI
4120 D2=A(N1,B(1))*A(N,B(2))-A(N,B(1))*A(N1,B(2))
4130 F=F*D2*S:DM=DM+F:S=-S:IFCN=DTHEN4240
4135 X=3
4140 CT(X)=CT(X)+1:IFCT(X)<=XTHEN4170
4150 CT(X)=1:X=X+1:IFX>NTHEN4240
4160 GOTO4140
4170 FORW=XTO3STEP-1
4180 P(W)=P(W)+1:IFW=NTHEN4230
4190 IFP(W)<=NTHEN4210
4200 P(W)=1
4210 FORI=W+1TON:IFP(W)=P(I)THEN4180
4220 NEXTI
4230 NEXTW:NEXTCN
4240 RETURN
4500 IFNU>DETHEN4520
4510 Y=DE:X=NU:GOTO4530
4520 Y=NU:X=DE
```

```
4530 Q=Y/X:R=Y-X*INT(Q):IFR=0THEN4550
4540 Y=X:X=R:GOTO4530
4550 NU=NU/X:DE=DE/X
4560 IFDE<0THENNU=-NU:DE=-DE
4570 RETURN
5000 PRINT:IFLEN(STR$(DX))>LEN(STR$(DS))THEN5020
5010 L1=LEN(STR$(DS)):GOTO5030
5020 L1=LEN(STR$(DX))
5030 IFLEN(STR$(NU))>LEN(STR$(DE))THEN5050
5040 L2=LEN(STR$(DE)):GOTO5060
5050 L2=LEN(STR$(NU))
5060 PRINTTAB(6+L1-LEN(STR$(DX)));STR$(DX);
5070 IFDX=NUORDE=1THENPRINT:GOTO5090
5080 PRINTTAB(9+L1+L2-LEN(STR$(NU)));STR$(NU)
5090 PRINT"X";RIGHT$(STR$(G),LEN(STR$(G))-1);" = ";
5100 FORJ=6TO5+L1:PRINTTAB(J)"-";:NEXT
5110 IFDE=1THENPRINT" =";NU:GOTO5150
5120 IFDX=NUTHEN5150
5130 PRINT" = ";:IN=9+L1:FI=8+L1+L2
5140 FORJ=INTOFI:PRINTTAB(J)"-";:NEXT
5150 PRINTTAB(6+L1-LEN(STR$(DS)));STR$(DS);
5160 IFDE=1ORDE=DSTHENPRINT:GOTO5180
5170 PRINTTAB(9+L1+L2-LEN(STR$(DE)));STR$(DE)
5180 RETURN
```

Il programma è diviso in due sezioni principali, come risulta dal menù (linee 200-280). Nella prima parte, alle linee 1030-1110 si accettano i dati in input; N è l'ordine del determinante mentre i suoi elementi sono contenuti nella matrice A(I,J). Alla riga 1190 si indirizza l'elaborazione all'algoritmo principale solo se N è maggiore di due, poiché altrimenti il calcolo è banale e si svolge alle linee 1170-1180. Il calcolo di un determinante di ordine superiore a due è organizzato in forma di ruotine perché servirà anche alla soluzione dei sistemi lineari ed occupa la parte compresa tra le righe 4000-4240.

All'interno di questa routine, le variabili CT(I) e P(I) sono da mettere in relazione con la formazione delle disposizioni ed il loro significato verrà pienamente chiarito in seguito nel programma sulle disposizioni. Per quanto riguarda le altre: D è il numero delle disposizioni, F è il prodotto tra gli elementi delle colonne permutate ed il determinante del secondo ordine, infine S (linee 4030 e 4130) inverte il segno a ogni addendo, poiché, come è stato detto, gli addendi che concorrono a formare il determinante vanno presi alternativamente con il segno + e −. La seconda sezione per la soluzione dei sistemi lineari occupa le linee 2000-2450.

I sistemi con due equazioni vengono risolti come un caso particolare (linee 2260-2340); quelli formati da più di due equazioni vengono risolti immediatamente dopo (linee 2350-2450). DS è il determinante del sistema, il quale deve essere diverso da 0, DX è quello che si ottiene dal precedente sostituendo a una variabile i termini noti (2400-2450). In entrambi i casi il determinante è calcolato dalla subroutine 4000 già considerata in precedenza.

Il risultato è dato in forma frazionaria: X = DX/DS. I termini della

frazione sono semplificati nella routine 4500 la quale altro non è che l'algoritmo euclideo.
NU è il numeratore, DE il denominatore. Se DE è negativo si invertono i segni di entrambi in modo da avere un eventuale segno meno solo al numeratore.
L'ultima parte del listato è occupata dalla subroutine 5000. Essa opera sui risultati, soprattutto con le funzioni di stringa per esporli in modo più chiaro, sul modello in uso nei testi di matematica.

Proposte operative

1. Si voglia determinare il punto di intersezione di due rette aventi rispettivamente le equazioni $y = \frac{1}{2}x + 2$ e $y = 2x - 3$.
Il punto richiesto ha per coordinate la soluzione del sistema formato da dette equazioni.
Per utilizzare il programma il sistema deve essere ridotto alla forma:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 2 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$$

Si selezioni quindi il punto 2 del menù e si ponga N = 2. Il coefficiente $-1/2$ dovrà essere scritto in forma decimale, cioè $-.5$; il coefficiente della y è uguale a 1; 2 e -3, alla destra del segno uguale, sono i termini noti.
Dopo la conferma, appare la soluzione. X_1 rappresenta l'ascissa e X_2 l'ordinata del punto desiderato.
2. Si voglia risolvere il seguente problema: trovare l'equazione di terzo grado della curva passante per i punti $A(-1, 21)$, $B(1, 15)$, $C(2,15)$ e $D(3,9)$. La curva è illustrata nella figura 9 e la sua equazione generica è: $ax^3 + bx^2 + cx + d = y$. Il problema consiste nel trovare i coefficienti della variabile x.
Poiché la curva passa per il punto A, sostituendo le coordinate alle variabili x e y nell'equazione, deve essere soddisfatta la seguente uguaglianza

$$a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 21$$

cioè:

$$-a + b - c + d = 21.$$

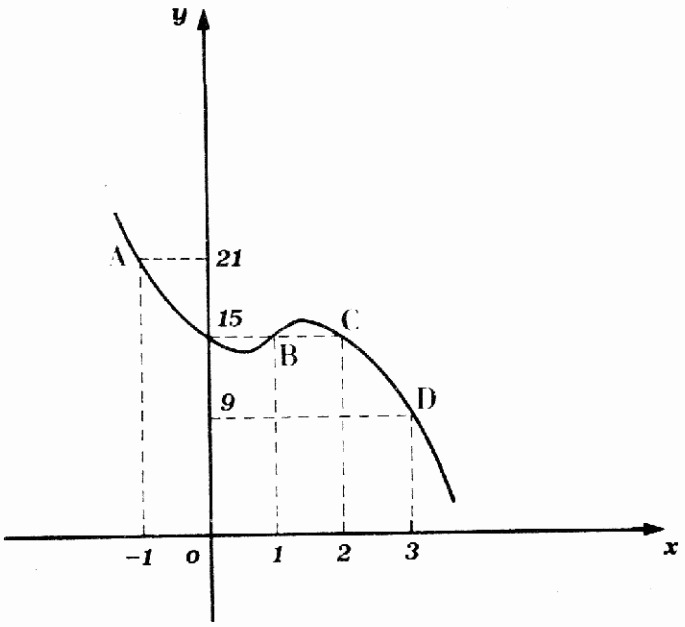


Fig. 9

Poiché la curva passa anche per gli altri tre punti è lecito ripetere l'operazione con le loro coordinate. Si ottengono in questo modo quattro equazioni lineari che formano un sistema.

$$\begin{cases} -a + b - c + d = 21 \\ a + b + c + d = 15 \\ \\ 8a + 4b + 2c + d = 15 \\ 27a + 9b + 3c + d = 9 \end{cases}$$

È il momento di introdurre i dati nel computer.

```
* SOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE *

SCRIVI IL NUMERO DI EQUAZIONI CHE FORMA-
NO IL SISTEMA.
N (N<=10) =? 4                          <RETURN>

PER OGNI EQUAZIONE SCRIVI ORDINATAMENTE
I COEFFICIENTI ED I TERMINI NOTI.

EQUAZIONE 1
   COEFFICIENTE DI X1 =?-1              <RETURN>
   COEFFICIENTE DI X2 =? 1              <RETURN>
   COEFFICIENTE DI X3 =?-1              <RETURN>
   COEFFICIENTE DI X4 =? 1              <RETURN>
   TERMINE NOTO =? 21                   <RETURN>
```

```
EQUAZIONE 2
   COEFFICIENTE DI X1 =? 1                 <RETURN>
   COEFFICIENTE DI X2 =? 1                 <RETURN>
   COEFFICIENTE DI X3 =? 1                 <RETURN>
   COEFFICIENTE DI X4 =? 1                 <RETURN>
   TERMINE NOTO =? 15                      <RETURN>

EQUAZIONE 3
   COEFFICIENTE DI X1 =? 8                 <RETURN>
   COEFFICIENTE DI X2 =? 4                 <RETURN>
   COEFFICIENTE DI X3 =? 2                 <RETURN>
   COEFFICIENTE DI X4 =? 1                 <RETURN>
   TERMINE NOTO =? 15                      <RETURN>

EQUAZIONE 4
   COEFFICIENTE DI X1 =? 27                <RETURN>
   COEFFICIENTE DI X2 =? 9                 <RETURN>
   COEFFICIENTE DI X3 =? 3                 <RETURN>
   COEFFICIENTE DI X4 =? 1                 <RETURN>
   TERMINE NOTO =? 9                      <RETURN>

          CONFERMI?(Y/N)
```

*** SOLUZIONI ***

$$X1 = \frac{-48}{48} = -1$$

$$X2 = \frac{144}{48} = 3$$

$$X3 = \frac{-96}{48} = -2$$

$$X4 = \frac{720}{48} = 15$$

PREMI UN TASTO QUALSIASI PER CONTINUARE

I risultati rappresentano i valori delle incognite: a, b, c, d. L'equazione cercata è pertanto:

$$y = -x^3 + 3x^2 - 2x + 15$$

INTEGRALI DEFINITI

Data una funzione $f(x)$, continua e non negativa in un intervallo (a, b), da un punto di vista geometrico, l'integrale definito rappresenta l'area del trapezoide $ABMN$ (vedi figura 10) delimitato dalla curva di equazione $y = f(x)$, dall'asse delle x e dalle parallele all'asse delle y AM e BN.

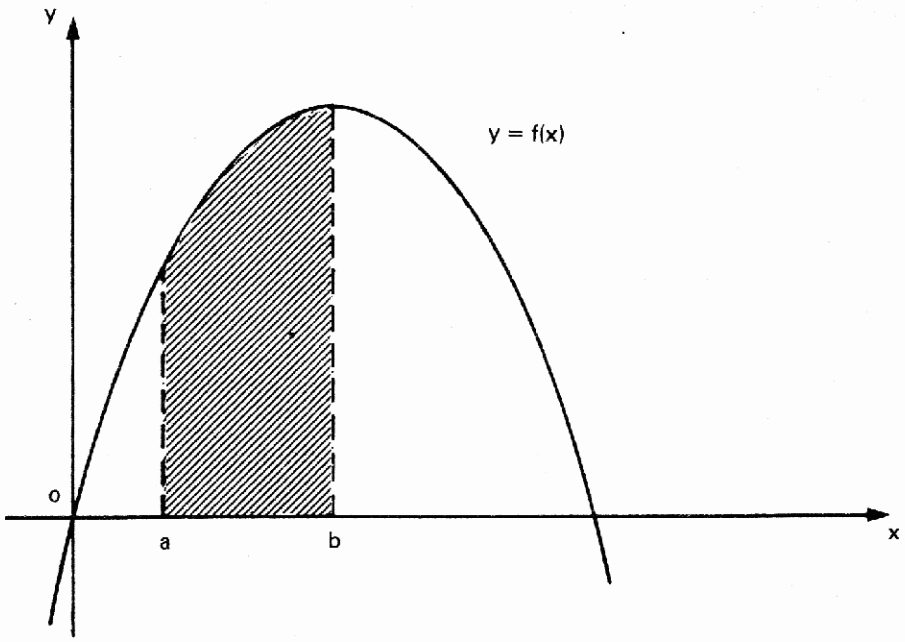


Fig. 10

Se suddividiamo l'intervallo (a, b) in n parti di ampiezza $h = (b - a)/n$, possiamo definire la seguente somma:

$$S = f(x_1) \times h + f(x_2) \times h + \ldots + f(x_n) \times h$$

dove $x_i = a + ih$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
Il valore di S dipende dall'ampiezza delle parti h e pertanto dal numero delle suddivisioni n. Al variare di n avremo:

$$S_1 \ , \ S_2 \ , \ S_3 \ , \ \ldots, \ S_n \ , \ \ldots$$

L'area del trapezoide e l'integrale definito della funzione $f(x)$ sono uguali al limite della successione S_n per n tendente all'infinito.
Il programma adotta due metodi di integrazione: quello di Simpson con $2n$ intervalli e quello di Gauss con 12 punti.
Nel primo caso si usa la formula:

$$\int_a^b f(x)dx = h/3 \ \{f(a) + 4 \ [f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})] +$$

$$+ 2 \ [f(x_e) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})] + f(b)\}$$

dove $h = \dfrac{b - a}{2n}$ e $x_1 = a + ih$, con $i = 1, 2, 3, \ldots, 2n$.

Nel secondo caso si utilizza la seconda formula:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)/2 \times \sum_{i=0}^{11} w_i \times f(y_i)$$

dove $y_i = v_i(b-a)/2 + (b-a)/2$. I numeri v_i e w_i sono definiti nella prima parte del programma e memorizzati nelle variabili con indici V(I) e W(I).

La funzione integranda deve essere scritta nell'istruzione DEF di linea 200 seguendo le istruzioni che appaiono sullo schermo; dopo di che il programma deve riprendere dall'inizio.

Successivamente bisogna inserire gli estremi dell'intervallo nel quale si vuole integrare la funzione e, solo se si adotta il metodo di Simpson, va specificato in quante parti suddividere gli intervalli $b-a$. Aumentando n aumenta la precisione, tuttavia è sufficiente porre $n = 10$ se $b-a$ ha un valore unitario.

La tecnica di programmazione non presenta difficoltà e consiste nel seguire le formule date.

Ecco il listato.

```
5 PRINT"■":POKE53280,6
10 PRINTTAB(6)"┌──────────────────────────────────────┐"
20 PRINTTAB(6)"│ "SPC(25)" │"
30 PRINTTAB(6)"│     INTEGRALI DEFINITI     │"
40 PRINTTAB(6)"│ "SPC(25)" │"
50 PRINTTAB(6)"└──────────────────────────────────────┘"
60 PRINTTAB(4)"■■■■PREMI UN TASTO PER CONTINUARE>"
70 GETA$:IFA$=""THEN70
80 DIM V(11),W(11)
90 PRINT"■"
100 PRINT"DEFINIRE LA FUNZIONE DA INTEGRARE ALLA"
110 PRINT"LINEA 200 DEL PROGRAMMA."
120 PRINT"■SE LA FUNZIONE E' GIA' STATA DEFINITA"
130 PRINT"PREMERE UN TASTO QUALSIASI PER":PRINT"CONTINUARE."
140 GETA$:IFA$=""THEN140
180 REM ******************************
190 REM
200 DEF FNY(X)=-2*X*X+4*X
210 REM
220 REM ******************************
230 PRINT"■"
240 PRINT"SCEGLI TRA I DUE SEGUENTI METODI DI"
250 PRINT"INTEGRAZIONE."
260 PRINT"■■ 1. SIMPSON":PRINT"■ 2. GAUSS■■"
270 INPUT"SCELTA";S$:IFS$="1"ORS$="2"THEN290
280 PRINT"□□":GOTO270
290 ONASC(S$)-48GOSUB500,1000
300 PRINT"■■■■      VUOI CONTINUARE? (Y/N)"
310 GETA$:IFA$=""THEN310
320 IFA$="Y"THEN90
330 IFA$="N"THENPRINT"■":POKE53280,14:END
340 GOTO310
470 REM
480 REM  *** METODO DI SIMPSON ***
490 REM
```

```
500 GOSUB1500
510 PRINT"■SCRIVI IN QUANTE PARTI VUOI SUDDIVIDERE"
520 PRINT"L'INTERVALLO. (N=NUMERO PARI)■"
530 INPUT"N=";N:N=ABS(N):IFN<2THENN=2
540 N=INT((N+1)/2)*2
550 I=0:S=0:H=(X2-X1)/N:N1=N-1
560 FORJ=1TON1STEP2:X=X1+J*H:S=S+FNY(X):NEXT
570 I=S*4:S=0:N2=N1-1
580 FORJ=2TON2STEP2:X=X1+J*H:S=S+FNY(X):NEXT
590 I=I+2*S+FNY(X1)+FNY(X2)
600 I=I*H/3
610 GOSUB1700
960 RETURN
970 REM
980 REM  *** METODO DI GAUSS ***
990 REM
1000 GOSUB1500
1010 I=0:IFFF=0THENGOSUB1900
1020 FORJ=0TO11
1030 X=(X2-X1)*V(J)/2
1040 X=X+(X2-X1)/2
1050 I=I+W(J)*FNY(X)
1060 NEXTJ
1070 I=I*(X2-X1)/2
1080 GOSUB1700
1460 RETURN
1470 REM
1480 REM    ESTREMI DELL'INTERVALLO
1490 REM
1500 PRINT"■SCRIVI GLI ESTREMI DELL'INTERVALLO DI"
1510 PRINT"INTEGRAZIONE. (X1<X2)■"
1520 INPUT"X1=";X1
1530 INPUT"X2=";X2
1540 IFX1<X2THEN1580
1550 PRINT"■■DEVE ESSERE X1<X2, RIPROVA!"
1560 FORT=1TO3000:NEXT
1570 GOTO1500
1580 RETURN
1670 REM
1680 REM   STAMPA RISULTATI
1690 REM
1700 PRINT"■■┌";X2:PRINT"|"
1710 PRINT"|F(X)DX ="I
1720 PRINT"|":PRINT"└";X1
1730 RETURN
1870 REM
1880 REM   VALORI COSTANTI V(I),W(I)
1890 REM
1900 FORK=0TO5:READV(K):NEXT
1910 FORK=6TO11:V(K)=-V(K-6):NEXT
1920 FORK=0TO5:READW(K):W(K+6)=W(K):NEXT
1930 FF=1:RETURN
1950 DATA .1252334085,.3678314989
1960 DATA .5873179542,.7699026741
1970 DATA .9041172563,.9815606342
1980 DATA .2491470458,.2334925365
1990 DATA .2031674267,.1600783285
2000 DATA .1069393259,.0471753363
```

Dopo il titolo, alla linea 80, vengono dimensionati i vettori V e W che contengono i valori da utilizzare con il metodo di Gauss. La funzione da integrare va definita alla linea 200; attualmente è scritta un'equazione di secondo grado, la stessa che compare in un esempio riportato

al termine di queste note. Le linee 240-290 permettono la scelta tra i metodi di Simpson e di Gauss. Il primo di questi è collocato alle linee 500-960. Esso utilizza la subroutine 1500 per accettare in input gli estremi dell'intervallo di integrazione e poi prevede che si indichi in quante parti questo deve essere suddiviso (linea 530). Il calcolo dell'integrale viene svolto alle linee 550-600 e segue la formula riportata nella parte generale che precede il listato. La variabile S è la somma degli addendi compresi nelle parentesi quadre; I è il valore dell'integrale. Il metodo di Gauss occupa le linee 1000-1460. La variabile *flag* FF indica se sono già stati caricati i valori costanti nei vettori V e W. Anche in questo caso la stampa del risultato utilizza la subroutine 1700. In essa si usano alcuni simboli grafici, tra quelli presenti nella tastiera del Commodore 64, per creare il simbolo di integrale.

Proposte operative

1. Si voglia calcolare l'area della superficie limitata dalla parabola di equazione $y = -x^2 = 4x$ e l'asse delle x.
La parabola incontra l'asse delle x nei punti di ascissa 0 e 4, pertanto sono questi gli estremi dell'intervallo di integrazione (si veda la figura 11).

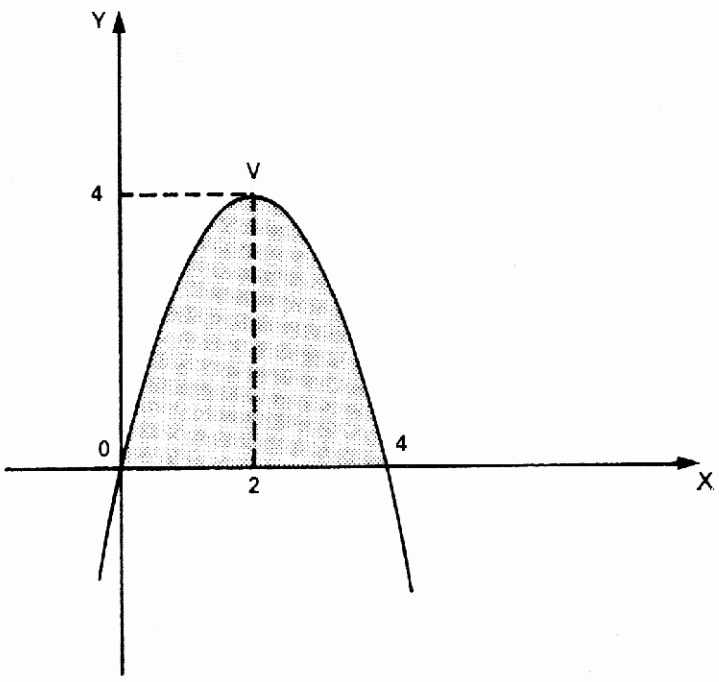


Fig. 11

L'area cercata è:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx$$

Definiamo la funzione alla linea 200 del programma, otterremo il seguente output.

```
LIST200
200 DEF FNY(X)=-2*X*X+4*X
RUN


SCRIVI GLI ESTREMI DELL'INTERVALLO DI
INTEGRAZIONE. (X1<X2)

X1=? 0
X2=? 1

CRIVI IN QUANTE PARTI VUOI SUDDIVEDERE
L'INTERVALLO. (N=NUMERO PARI)
N =? 10

  ∫ 1
  F(X) = 1.47894283
  0

        VUOI CONTINUARE? (Y/N)
```

Con carta e matita il risultato sarebbe stato 8/3, quindi in perfetto accordo con il valore decimale ottenuto al computer.
Archimede seppe elaborare un metodo per dare una risposta a questo tipo di problemi più di 2000 anni fa!

2. Si voglia determinare la lunghezza di un arco della parabola di equazione $y = x^2$ avente per estremi i punti $O(0,0)$ e $P(1,1)$. (Vedi figura 12.)

La formula per trovare la lunghezza di un arco di curva piana è:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \times \mathrm{d}x$$

Poiché $f(x) = x^2$, la sua derivata è: $f'(x) = 2x$ e $f'^2(x) = 4x^2$. Alla linea 200 del programma definiamo pertanto la seguente funzione:

```
DEF FNY(X) = SQR(1 + 4 * X * X)
```

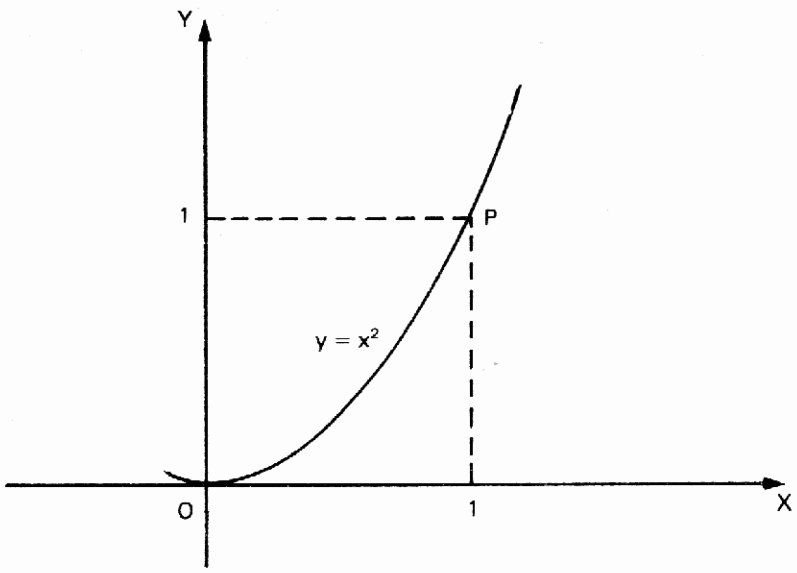


Fig. 12

Avviamo nuovamente il programma ed ecco che cosa apparirà sullo schermo.

```
QUANTI SONO GLI OGGETTI?
PREGO, NON PIU' DI 10 ? 5

QUANTI OGGETTI FORMANO OGNI GRUPPO?
(K<N)? 3

IL NUMERO DELLE DISPOSIZIONI SEMPLICI
DI 5 OGGETTI, PRESI A 3 A 3, E':
D = 60
```

I risultati ottenuti con il metodo di Simpson ($N = 10$) e di Gauss concordano fino alla settima cifra decimale.

ADATTAMENTO A UN POLINOMIO

In un precedente esempio si è considerato come sia possibile trovare l'espressione algebrica di una curva passante per alcuni punti dati risolvendo un sistema di equazioni di primo grado.
Nell'esempio i punti appartenevano a una curva algebrica del terz'ordine e si trattava di calcolare i coefficienti della sua equazione.
Supponiamo invece che i punti fossero stati scelti arbitrariamente oppure fossero appartenuti a una funzione empirica; quasi certamente non sarebbe stato possibile individuare la curva seguendo lo stesso procedimento.

In casi simili, tuttavia, è pur sempre possibile trovare una funzione polinomiale che soddisfi ai dati con una certa approssimazione. Il metodo va sotto il nome di adattamento a un polinomio. Esso consiste nel calcolare i coefficienti di una frazione di grado m del tipo:

$$y = a_0x^0 + a_1x^1 - a_2x^2 + ... + a_mx^m$$

perché si adatti nel miglior modo ad un certo numero n di coppie di valori x_i, y_i (con $n > m$).
In linea generale, l'adattamento si basa sul calcolo dei valori che rendono minima la somma degli scarti quadratici

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0x_i^0 - a_1x_i^1 - \ldots a_mx_i^m)^2$$

Il problema viene infine ricondotto alla soluzione di un sistema di equazioni lineari.
Il programma che segue accetta in input un certo numero di coppie di valori, fino a un massimo di 50 e, successivamente, chiede il grado del polinomio al quale si vuole effettuare l'adattamento, grado che deve essere compreso tra 0 e 8. Dopo un breve tempo di elaborazione vengono forniti i coefficienti del polinomio e il grado di approssimazione espresso percentualmente. I coefficienti corrispondono, nell'ordine, ai termini ordinati secondo le potenze decrescenti della z ed è bene precisare che essi sono affetti sia dall'approssimazione insita nel metodo sia da quella dovuta all'elaborazione digitale.
Non c'è da stupirsi di ottenere come risposta **.99999998** invece di 1 e per ovviare a questo inconveniente si è convenuto, nel programma, di considerare interi i risultati che differiscono da un numero intero per meno di **1E-08**.
La bontà dell'adattamento viene calcolata in percentuale con la formula:

$$P = 100 \times \sqrt{1 - \frac{\Sigma_i(y_i - \hat{y}_i)^2}{\Sigma_i(y_i - \bar{y})^2}}$$

dove y_i sono i valori indicati dall'utente, $\hat{y}_i$ sono i corrispondenti valori calcolati attraverso la funzione polinomiale e $\bar{y}$ è il valore medio delle y. In base a quest'ultima indicazione si valuterà se i risultati sono soddisfacenti; in caso contrario rimane la possibilità di provare l'adattamento con un polinomio di grado diverso con la sola limitazione che esso dovrà essere necessariamente inferiore al numero di dati introdotti. Generalmente una corrispondenza superiore al 90 per cento è accettabile. Il programma permette inoltre il calcolo della funzione per alcuni valori di x. Se per essi vengono indicati gli stessi valori inseriti

nella fase iniziale, confrontando i precedenti valori di y con quelli calcolati attualmente, si ha un'ulteriore riprova del grado di approssimazione raggiunto.

Per altri valori di x si ottiene l'interpolazione dei dati o la loro estrapolazione a seconda che essi cadano all'interno o all'esterno dei dati iniziali. Su richiesta, il programma fornisce anche il grafico, dimensionato automaticamente ed in alta risoluzione, della funzione, mettendo in evidenza i punti di coordinate (x_i, y_i) indicate dall'utente.

Se il grado di approssimazione è prossimo al 100 per cento si vedrà una precisa coincidenza tra la curva ed i punti. Per maggiore chiarezza è opportuno che l'intervallo di rappresentazione grafica sia più ampio di quello in cui cadono le ascisse x dei punti; per esempio, se si calcola il polinomio interpolatore dei punti (0,1), (1,3), (2,5), (3,4), (4,0), l'intervallo di rappresentazione potrebbe essere da $X1 = -1$ a $X2 = 5$.

Per una migliore "lettura" del grafico è bene tenere presente che il dimensionamento è automatico il che comporta, in genere, due diverse unità di misura per i due assi. La curva ottenuta è quindi il risultato di una trasformazione affine; in altre parole risulta "schiacciata" o "dilatata" rispetto a quella che si avrebbe adottando un'unica unità di misura. Per avere dei riferimenti, in assenza di altre indicazioni, ci si baserà sui punti dei quali sono note le coordinate per averle indicate nella parte iniziale del programma.

```
10 REM   ADATTAMENTO AD UN POLINOMIO
20 REM ********************************
30 POKE53280,6:DIMX(50),Y(50),P(16)
40 PRINT"■      ADATTAMENTO AD UN POLINOMIO"
50 PRINT"   CON IL METODO DEI MINIMI QUADRATI"
60 PRINT"   ──────────────────────────────────────"
70 PRINT"■QUANTE COPPIE DI VALORI DEVONO ESSERE"
80 INPUT"INSERITE";ND:ND=INT(ABS(ND)):IFND<=50THEN100
90 PRINT"■PREGO NON PIU' DI 50.":FORJ=1TO2000:NEXT:GOTO40
100 IFND>1THEN120
110 PRINT"■ALMENO 2 COPPIE DI VALORI, PREGO.":FORJ=1TO2000:NEXT:GOTO40
120 PRINT"■PER OGNI DATO SCRIVI I VALORI DI X E Y.■"
130 FORJ=1TOND:PRINTTAB(3-LEN(STR$(J)));STR$(J);")";
140 INPUT" X=";X(J):PRINTTAB(20);:INPUT"□Y=";Y(J)
150 NEXT:PRINTTAB(10);"■- CONFERMI? (Y/N)-"
160 GETK$:IFK$=""THEN160
170 IFK$="Y"THEN200
180 IFK$="N"THEN40
190 GOTO160
200 PRINT"■■■INDICA IL GRADO DEL POLINOMIO AL QUALE"
210 INPUT"ADATTARE LA CURVA (0-8). ";G:G=INT(ABS(G))
220 IFG<9THEN250
230 PRINT"■ERRORE! IL GRADO DEVE ESSERE COMPRESO"
240 PRINT"TRA 0 E 8. RIPETI.":FORJ=1TO2000:NEXT:GOTO200
250 IFG<NDTHEN280
260 PRINT"■SPIACENTE, I DATI NON SONO SUFFICIENTI.":G=ND-1
270 PRINT"DEVO RIDURRE A";G;"IL GRADO DEL POLINOMIO."
275 FORT=1TO2000:NEXT
280 G2=G*2:N=G+1
290 FORJ=1TOG2:P(J)=0
300 FORK=1TOND:P(J)=P(J)+X(K)↑J
```

```
310 NEXTK:NEXTJ
320 P(0)=ND:R(1)=0
330 FORJ=1TOND:R(1)=R(1)+Y(J):NEXTJ
340 IFN=1THEN380
350 FORJ=2TON:R(J)=0
360 FORK=1TOND:R(J)=R(J)+Y(K)*X(K)↑(J-1)
370 NEXTK:NEXTJ
380 FORJ=1TON:FORK=1TON
390 A(J,K)=P(J+K-2)
400 NEXTK:NEXTJ:GOSUB5000
410 PRINT"■■■ POTENZA DI X          COEFFICIENTE"
420 PRINT" ──────────────────────────────────────■"
430 FORJ=1TON:PRINTTAB(4);J-1;TAB(22);C(J):NEXT
440 PRINT"■ ──────────────────────────────────────"
450 W=0:FORJ=1TOND:W=W+Y(J):NEXT
460 M=W/ND:P=0:Q=0
470 FORJ=1TOND:W=0
480 FORK=1TON:W=W+C(K)*X(J)↑(K-1):NEXTK
490 P=P+(Y(J)-W)↑2:Q=Q+(Y(J)-M)↑2
500 NEXTJ:IFQ=0THENP=100:GOTO520
510 P=INT(1000*SQR(1-P/Q))/10
520 PRINT"■ ACCURATEZZA DELL'ADATTAMENTO =";STR$(P);"%"
530 PRINT"■■■■■    <PREMI UN TASTO PER CONTINUARE>"
540 GETK$:IFK$=""THEN540
550 PRINT"■■■■■■■"
560 PRINT"SCEGLI UNA DELLE SEGUENTI CONTINUAZIONI"
570 PRINT"■■1. ADATTAMENTO AD UN POLINOMIO DI GRADO"
580 PRINT"    DIVERSO."
590 PRINT"■2. DETERMINAZIONE DI PUNTI SPECIFICI."
600 PRINT"■3. GRAFICO DELLA CURVA."
610 PRINT"■4. FINE DEL PROGRAMMA."
620 GETK$:IFK$=""THEN620
630 SC=VAL(K$):IFSC<1ORSC>4THEN620
640 ONSCGOTO200,1000,2000,9000
1000 PRINT"■PER FINIRE PREMI IL TASTO <F>.■"
1010 INPUT" X =";X$:IFX$="F"THEN550
1015 XX=VAL(X$):IFXX<>0THEN1030
1020 IFSTR$(XX)<>CHR$(32)+X$THENPRINT"□□":GOTO1010
1030 YY=0:FORK=1TON:YY=YY+C(K)*XX↑(K-1):NEXT
1040 PRINTTAB(18);"□Y =";YY:GOTO1010
2000 PRINT"■INDICA GLI ESTREMI DELL'INTERVALLO DA"
2010 PRINT"RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE."
2020 INPUT"■X1 =";X1:INPUT"■X2 =";X2
2030 IFX1<X2THEN2060
2040 PRINT"■DEVE ESSERE X1<X2. RIPETI."
2050 FORT=1TO2000:NEXT:GOTO2000
2060 PRINT"■■■■■■■"TAB(10)"UN MOMENTO, PREGO."
2070 DX=(X2-X1)/320:XX=X1:GOSUB5200:Y1=YY:Y2=YY
2080 FORJ=0TO319:XX=X1+J*DX:GOSUB5200
2090 IFYY<Y1THENY1=YY
2100 IFYY>Y2THENY2=YY
2110 NEXTJ:DY=(Y2-Y1)/200
2120 IFDY=0THENDY=.01
2130 X0=INT(-X1/DX):Y0=INT(Y2/DY)
2140 PRINT"■":POKE53272,PEEK(53272)OR8
2150 FORI=8192TO16191:POKEI,0:NEXT
2160 FORI=1024TO2023:POKEI,6:NEXT
2170 POKE53265,PEEK(53265)OR32
2180 IFY0>=0ANDY0<=199THENYY=Y0:GOSUB5300
2190 IFX0>=0ANDX0<=319THENXX=X0:GOSUB5400
2195 XX=X1:GOSUB5200
2200 Y1=Y0-INT(YY/DY):X=0:Y=Y1:GOSUB5500
2210 FORX=1TO319:XX=X1+X*DX:GOSUB5200
2215 Y2=Y0-INT(YY/DY)
2220 D=Y2-Y1:IFABS(D)>1THENY=Y1+SGN(D):GOSUB5500:Y1=Y:GOTO2220
2230 Y=Y2:GOSUB5500:Y1=Y2:NEXTX
```

```
2240 FORK=1TOND:XK=INT((X(K)-X1)/DX):Y=Y0-INT(Y(K)/DY)
2242 IFXK<0ORXK>319THEN2310
2244 IFY<0ORY>199THEN2310
2245 W1=XK-5
2250 IFW1<0THENW1=W1+1:GOTO2250
2255 W2=XK+5
2260 IFW2>319THENW2=W2-1:GOTO2260
2270 FORX=W1TOW2:GOSUB5500:NEXT
2275 W1=Y-5
2280 IFW1<0THENW1=W1+1:GOTO2280
2285 W2=Y+5
2290 IFW2>199THENW2=W2-1:GOTO2290
2300 X=XK:FORY=W1TOW2:GOSUB5500:NEXT
2310 NEXTK:S$="<PREMI UN TASTO>"
2320 POKE56334,PEEK(56334)AND254:POKE1,PEEK(1)AND251
2330 FORCH=1TOLEN(S$):NL=ASC(MID$(S$,CH,1))
2335 IFNL>64THENNL=NL-64
2340 FORLN=0TO7:LS=15872+8*(CH+1)+LN:BY=NL*8+LN+53248
2350 POKELS,PEEK(BY):NEXTLN:NEXTCH
2360 POKE1,PEEK(1)OR4:POKE56334,PEEK(56334)OR1
2370 GETK$:IFK$=""THEN2370
2380 POKE53265,PEEK(53265)AND223
2390 POKE53272,21:GOTO550
5000 IFN<>1THEN5020
5010 C(1)=R(1)/A(1,1):RETURN
5020 FORK=1TOG:I=K+1:L=K
5030 IFABS(A(I,K))>ABS(A(L,K))THENL=I
5040 IFI<NTHENI=I+1:GOTO5030
5050 IFL=KTHEN5080
5060 FORJ=KTON:W=A(K,J):A(K,J)=A(L,J):A(L,J)=W:NEXTJ
5070 W=R(K):R(K)=R(L):R(L)=W
5080 I=K+1
5090 W=A(I,K)/A(K,K):A(I,K)=0
5100 FORJ=K+1TON:A(I,J)=A(I,J)-W*A(K,J):NEXTJ
5110 R(I)=R(I)-W*R(K):IFI<NTHENI=I+1:GOTO5090
5120 NEXTK:C(N)=R(N)/A(N,N)
5130 FORI=GTO1STEP-1:W=0
5140 FORJ=I+1TON:W=W+A(I,J)*C(J):C(I)=(R(I)-W)/A(I,I)
5150 NEXTJ:NEXTI
5160 FORI=0TON:IFABS(INT(C(I))+1-C(I))<1E-08THENC(I)=INT(C(I))+1
5170 NEXTI:RETURN
5200 YY=0:FORK=1TON
5210 YY=YY+C(K)*XX↑(K-1)
5220 NEXTK:RETURN
5300 RO=INT(YY/8):LN=YYAND7:BY=8192+RO*320+LN
5310 FORX=BYTOBY+312STEP8:POKEX,255:NEXT
5320 RETURN
5400 CH=INT(XX/8):BI=2↑(7-(XXAND7))
5410 FORRO=0TO24:FORLN=0TO7
5420 BY=8192+RO*320+8*CH+LN
5430 POKEBY,PEEK(BY)ORBI
5440 NEXTLN:NEXTRO:RETURN
5500 IFY<0ORY>199THENRETURN
5510 CH=INT(X/8):RO=INT(Y/8)
5520 LN=YAND7:BY=8192+RO*320+8*CH+LN
5530 BI=7-(XAND7):POKEBY,PEEK(BY)OR(2↑BI)
5540 RETURN
9000 POKE53280,14:PRINT"■":END
```

La linea 30 modifica il colore del bordo e dimensiona alcune variabili con indice; X( ) e Y( ) memorizzano le coppie dei dati introdotti dall'utente, P( ) conterrà gli elementi della matrice usata nella routine di calcolo.

Vengono accettate fino ad un massimo di 50 coppie; il loro numero è contenuto nella variabile ND (linea 80).

Dopo la scrittura dei dati iniziali, che avviene con il ciclo FOR NEXT alle linee 130-150, il programma chiede il grado del polinomio interpolatore (variabile G) il quale necessariamente deve essere inferiore a ND e non superiore a 8.
Poiché il calcolo prevede la soluzione di un sistema di equazioni, le linee 280-400 predispongono una matrice con i coefficienti della stessa e chiamano la subroutine 5000 per la soluzione del sistema. Precisamente, la matrice A( ) contiene i coefficienti delle variabili e R( ) i termini noti del sistema; la soluzione, consistente nei coefficienti del polinomio interpolatore, è contenuta nella variabile con indice V( ).
Le linee successive (410-540) stampano i risultati e calcolano l'accuratezza dell'adattamento esprimendola in percentuale (variabile P).
Al termine della prima fase il programma prevede 4 continuazioni (menù alle linee 550-640). Con la prima si ritorna alla linea 200 per ripetere l'adattamento con un polinomio di grado diverso; se invece si desidera cambiare anche i dati iniziali bisogna fermare il programma e dare nuovamente il RUN.
Con la seconda si può ottenere il valore della funzione polinomiale in corrispondenza di alcuni valori della variabile X.
La quarta pone semplicemente termine al programma. La terza invece trasferisce il controllo ad una parte consistente del programma, quella adibita alla rappresentazione grafica in alta risoluzione (linee 2000-2390).
Questa inizia con la richiesta dell'intervallo di rappresentazione; X1 è l'estremo inferiore, X2 è quello superiore.
Le linee 2060-2130 stabiliscono l'unità di misura grafica per l'asse orizzontale (variabile DX) e per quello verticale (variabile DY); esse esprimono il valore corrispondente ad un punto video (si ricorda che lo schermo dispone di 200×320 punti). X0 e Y0 sono le coordinate, in pixel, dell'origine degli assi cartesiani. Le linee 2140-2170 fanno entrare il Commodore 64 in alta risoluzione azzerando la *bit map* e definendo il colore dello schermo. Successivamente vengono stampati gli assi cartesiani se, ovviamente, rientrano nell'area visibile dello schermo. Il ciclo principale per la stampa del grafico della funzione è alle linee 2210-2230; in esso Y1 e Y2 sono le ordinate, in pixel, di due punti consecutivi e D la loro differenza; la X non viene incrementata fino a che D non è minore di 2 in modo da non lasciare spazi vuoti tra un punto e il successivo.
Nel ciclo vengono chiamate due subroutine; la prima (GOSUB 5200) calcola il valore della funzione YY nel punto successivo, la seconda (GOSUB 5500) stampa un punto.
Terminata la stampa del grafico, in sovrapposizione, vengono stampati i punti dei quali l'utente ha specificato le coordinate nella parte iniziale del programma. I punti vengono visualizzati con due brevi segmenti

disposti in croce; W1 e W2 esprimono appunto l'inizio e la fine di tali segmenti (linee 2240-2300).
Infine le istruzioni 2310-2390 mandano un messaggio sullo schermo in alta risoluzione e fanno tornare il computer nel modo testo. L'ultima parte del listato è occupata dalle subroutine; vediamo brevemente il loro significato.
Subroutine 5000-5170: contiene l'algoritmo per la risoluzione di un sistema di equazioni.
Subroutine 5200-5220: calcola il valore YY della funzione in corrispondenza di un punto XX; XX e YY verranno poi convertite in coordinate video.
Subroutine 5300-5320: stampa l'asse orizzontale.
Subroutine 5400-5440: stampa l'asse verticale.
Subroutine 5500-5540: stampa un punto in alta risoluzione. La linea 9000 ristabilisce il colore del bordo e pone termine al programma.

Proposte operative

Si voglia determinare l'equazione della curva passante per i punti di coordinate (0,0), (1,256), (3,432), (5,320), (7,112), (8,32).
Non conoscendo il grado del polinomio interpolatore, si potrà iniziare con il secondo. In tal caso l'accuratezza dell'adattamento risulterà di poco superiore al 95 per cento, non proprio tale da sconsigliare un ulteriore tentativo con un'equazione di grado superiore.
Al menù si sceglierà la continuazione 1 e successivamente si porrà uguale a 3 il grado del polinomio.
Questa volta l'accuratezza è del 100 per cento e i coefficienti sono, nell'ordine:

8.3560035E − 06
323.999979
− 71.9999932
3.99999944

Tenendo conto dell'approssimazione insita nel calcolo, si potranno effettuare arrotondamenti e giungere così all'equazione:

$$y = 4x^3 - 72x^2 + 324x$$

Tornati al menu principale, si potrà passare o al calcolo della funzione per determinati valori della variabile indipendente x o alla parte grafica. In quest'ultimo caso l'intervallo della rappresentazione, preferibilmente, verrà indicato tra gli estremi X1 = −0.5 e X2 = 9.

Le piccole croci che evidenziano i punti sono solo all'apparenza cinque poiché una coincide con gli assi cartesiani.

PROGRAMMAZIONE LINEARE

Ipotizziamo che una ditta di abbigliamento venda tre tipi di stock indivisibili di magliette di taglie diverse. Il primo, che indichiamo di tipo *A*, contiene 25 magliette di taglia *L*, 12 di taglia *M* e 8 di taglia *S* e viene venduto al prezzo di 120 mila lire. Il gruppo di tipo *B* contiene 18, 8 e 13 magliette corrispondenti alle tre diverse taglie; il suo prezzo è di 110 mila lire. Il terzo gruppo, di tipo *C*, contiene 20, 4 e 5 magliette, rispettivamente di taglia *L*, *M* e *S* e viene venduto al prezzo di 100 mila lire.
Supponiamo che un rivenditore, in base alle vendite dell'anno precedente, abbia stabilito di dover acquistare almeno 300 magliette di taglia *L*, almeno 50 di taglia *M* e almeno 100 di taglia *S*. Il problema che deve affrontare consiste nello stabilire quanti stock dovrà acquistare e a quali tipi dovrà dare la preferenza per minimizzare i costi. Un modo poco raffinato d'affrontarlo consiste nel procedere per tentativi oppure, al computer, valutare per esteso un gran numero di alternative diverse per trovare quale di esse consenta il minor costo rendendo soddisfatte le condizioni imposte.
Forse è superfluo aggiungere che all'aumentare del numero dei dati il tempo di elaborazione cresce in modo esponenziale e potrebbe giungere a valori difficilmente accettabili. Fortunatamente a proposito esistono tecniche matematiche che consentono di affrontare il problema in modo ottimale e in tempi ragionevolmente brevi.
In questo programma viene adottato il metodo del simplesso; vediamo come funziona. Innanzitutto i dati vengono disposti ordinatamente in una tabella. Per una maggiore semplicità, si è adottata una tabella standard di 5 colonne, il cui contenuto verrà spiegato in seguito; l'utente può invece scegliere il numero di righe, fino ad un massimo di 8. Per l'introduzione dei dati viene usata una routine con funzione di *data entry*. Cosa significa? Nella maggior parte dei programmi i dati vengono immessi o con istruzioni DATA o con istruzioni INPUT; nel primo caso è necessario, ogni volta, modificare un certo numero di linee del listato, nel secondo, quando si vuole modificare o correggere un dato, quasi sempre si è costretti a riscriverli tutti. Un *data entry*, invece, consente l'introduzione ordinata dei dati e la loro correzione, limitando allo stesso tempo la lunghezza dei campi. Qualcuno potrebbe ritenere eccessivo l'uso di una routine non certamente breve al posto di semplici istruzioni INPUT, tuttavia, a lungo andare, dovrà riconoscere il grande vantaggio ed il risparmio di tempo dovuto ad

una funzionale e più sofisticata gestione dei dati. Ad esempio, quando alla domanda CONFERMI?(Y/N) si risponde N, si entra nel modo *edit* e appare un cursore giallo non lampeggiante. Con i comandi cursore ci si sposta sul campo da correggere, quindi si preme il tasto di funzione f1/f2 e, dopo la comparsa del normale cursore lampeggiante, si può procedere alla modifica del campo. Per uscire dal modo *edit* si preme il tasto di funzione f7/f8.
Ma torniamo alla soluzione del problema. Utilizzando i dati relativi alle magliette, servirà una tabella con tre righe per i tre tipi, *A*, *B* e *C*. Dopo la scrittura la tabella apparirà come segue:

DESCR.	QTA.1	QTA.2	QTA.3	COSTI
TIPO A	25	12	8	120
TIPO B	18	8	13	110
TIPO C	30	4	5	100
QTA. MIN.	300	50	100	

Gli elementi dell'ultima riga vengono detti *indicatori*. Il primo passo consiste nel cercare la colonna con l'indicatore più grande; questa viene detta *colonna pivot*. Se ne controllano tutti gli elementi per verificare se almeno uno di essi è positivo (in caso contrario il problema non ha soluzione). Tra gli elementi della colonna pivot va ricercato quello con costo unitario minore; sarà questo che individua la *riga pivot*.
Il passo successivo consiste nel dividere ogni elemento della riga pivot per il valore dell'elemento che è servito per individuarla e che potremo chiamare *elemento pivot*. Si riadattano le righe della tabella alla nuova riga pivot sottraendo ad ogni loro elemento il valore corrispondente della colonna pivot moltiplicato a quello della riga pivot. Al termine si sostituiscono tutti gli elementi della colonna pivot con i loro opposti divisi per il valore dell'elemento pivot e sostituendo lo stesso elemento pivot con il suo inverso. L'intera sequenza di operazioni viene ripetuta più volte e tutta la tabella viene rimaneggiata ripetutamente secondo l'algoritmo esposto; quando tutti gli indicatori sono negativi o nulli significa che si è giunti a una soluzione i cui valori numerici consistono proprio negli opposti degli indicatori stessi.
La soluzione del problema delle magliette data dal programma è:

```
IL MINIMO COSTO È 1250
OTTENUTO CON LE SEGUENTI QUANTITA':
TIPO C 7
ECCEDENZA QTA.2 = 18
TIPO B 5
```

Ciò significa che si dovranno acquistare 5 stock del tipo B e 7 stock del tipo C. In tutto si avranno:
$18 \times 5 + 30 \times 7 = 300$ magliette di taglia L,
$8 \times 5 + 4 \times 7 = 68$ magliette di taglia M, con un'eccedenza di 18 magliette rispetto al numero minimo di 50 (QTA.2) e infine
$13 \times 5 + 5 \times 7 = 100$ magliette di taglia S.
Il costo totale è $5 \times 110 + 7 \times 100 = 1250$ migliaia di lire e ci si deve aspettare che esso sia anche il costo minimo per l'acquisto delle quantità previste.
Dopo aver ottenuto i risultati si prosegue scegliendo una delle quattro opzioni offerte dal menù. Le prime due permettono di rivedere i dati iniziali e i risultati senza poter apportare modifiche. Poiché durante l'elaborazione la tabella viene profondamente rimaneggiata, dopo la conferma dei dati, si memorizza in una variabile con indice la mappa di memoria dello schermo per poter poi riproporre la stessa "videata" contenente i dati. Scegliendo invece la modifica dei dati, si riottiene la tabella entrando automaticamente nel modo *edit* e, solo in tal caso, viene ripetuta anche l'elaborazione per una nuova risposta.

```
10 REM   PROGRAMMAZIONE LINEARE
20 REM
30 PRINT"■":POKE53280,6:DIMMS(880)
40 PRINT"I DATI VANNO ORGANIZZATI IN UNA TABELLA"
50 PRINT"IN CUI OGNI RIGA CONTIENE GLI ELEMEENTI"
60 PRINT"CHE CONCORRONO A FORMARE UNA VOCE.■"
70 INPUT"NUMERO DI RIGHE (2-8) ";R
80 IFR<2ORR>8THENPRINT"■■":GOTO70
90 PRINT"■        ■ PROGRAMMAZIONE LINEARE "
100 PRINT"■■■  DESCR.  ■  ■ QTA.1■ ■ QTA.2■ ■ QTA.3■ ■ COSTO ■"
120 FORJ=1TOR
130 PRINT"■          ■  ■      ■ ■      ■ ■      ■ ■        "
140 NEXT
150 PRINT"■ QTA.MIN. ■  ■      ■ ■      ■ ■      ■ ■ ***** "
160 FORJ=1TOR:NR=4+J*2:NC=1:LU=10:GOSUB5000:DE$(J)=E$
170 FORK=1TO3:NC=8+K*7:LU=6:GOSUB5000:T(J,K)=VAL(E$):T0(J,K)=VAL(E$):NEXTK
180 NC=34:LU=7:GOSUB5000:C(J)=VAL(E$):C0(J)=VAL(E$)
190 NEXTJ:NR=4+J*2
200 FORK=1TO3:NC=6+K*7:LU=6:GOSUB5000:B(K)=VAL(E$):B0(K)=VAL(E$):NEXTK
210 PRINTTAB(11)"- CONFERMI? (Y/N) -"
220 GETK$:IFK$=""THEN220
230 IFK$="Y"THEN1000
240 IFK$="N"THEN260
250 GOTO220
260 PRINTTAB(11)"■                    "
270 J=1:K=0:NR=8:NC=1:LS=983+NR*40+NC
280 LS=983+NR*40+NC:POKELS+54272,7
290 GETA$:IFA$=""THEN290
300 IFA$=CHR$(29)ANDK<4THENGOSUB6000:K=K+1:GOTO360
310 IFA$=CHR$(157)ANDK>0THENGOSUB6000:K=K-1:GOTO360
320 IFA$=CHR$(17)ANDJ<R+1THENGOSUB6000:J=J+1:GOTO380
330 IFA$=CHR$(145)ANDJ>1THENGOSUB6000:J=J-1:GOTO380
340 IFA$=CHR$(133)ORA$=CHR$(137)THENGOSUB6000:GOTO400
345 IFA$=CHR$(136)ORA$=CHR$(140)THENGOSUB6000:GOTO210
350 GOTO290
360 IFJ=R+1ANDK=0THEN390
362 IFJ=R+1ANDK=4THENK=3:NC=27:GOTO280
365 IFK=0THENNC=1:GOTO380
```

```
370 NC=6+7*K:GOTO280
380 NR=4+J*2:IFJ<R+1ORC(K)>0ANDK<4)THEN280
385 IFK=4THENK=3:NC=27:GOTO280
390 K=1:NC=13:GOTO280
400 LU=6:IFK=0THENLU=10
410 IFK=4THENLU=7
420 GOSUB5000:IFK=0THENDE$(J)=E$:GOTO280
430 IFK=4THENC(J)=VAL(E$):C0(J)=VAL(E$):GOTO280
440 IFJ=R+1THENB(K)=VAL(E$):B0(K)=VAL(E$):GOTO280
450 T(J,K)=VAL(E$):T0(J,K)=VAL(E$):GOTO280
1000 PRINTTAB(8)"■ - UN MOMENTO, PREGO -"
1010 J=0:FORLS=1024TO1023+(6+R*2)*40:J=J+1:MS(J)=PEEK(LS):NEXT
1020 FORI=1TOR:V(I)=I:NEXT
1030 FORI=1TO3:H(I)=-I:NEXT:B(4)=0
1040 FL$="ON"
1050 FORI=RTO1STEP-1:IFC(I)<-.00001THENGOSUB4000:FL$="OFF"
1060 NEXTI:IFFL$="OFF"THEN1040
1070 FORL=1TO10000:M1=0:P2=0
1080 FORJ=1TO3:IFB(J)>M1THENM1=B(J):P2=J
1090 NEXTJ:IFM1<=0THEN2000
1100 M2=1000000:P1=0
1110 FORI=1TOR:S(I)=T(I,P2)
1120 IFT(I,P2)<=.00001THEN1150
1130 IFC(I)/T(I,P2)>M2THEN1150
1140 M2=C(I)/T(I,P2):P1=I
1150 NEXTI:S(R+1)=B(P2):P=T(P1,P2):GOSUB3000
1160 NEXTL
1170 PRINT"■NON SI TROVA LA RISPOSTA."
1180 GOTO2500
2000 PRINT"■IL MINIMO COSTO E'";-B(4)
2010 PRINT"OTTENUTO CON LE SEGUENTI QUANTITA':■"
2020 FORJ=1TO3:IFH(J)<=0THEN2040
2030 PRINTDE$(H(J));TAB(12);-B(J):GOTO2050
2040 PRINT"ECCEDENZA QTA.";-H(J);"=";-B(J)
2050 NEXTJ
2500 PRINT"■"
2510 FORJ=1TO11:PRINT"■":NEXT
2520 PRINT"    - PREMI UN TASTO PER CONTINUARE -"
2530 GETK$:IFK$=""THEN2530
2540 PRINT"■PREMI:"
2550 PRINT"■1. PER RIVEDERE LA TABELLA."
2552 PRINT"■2. PER RIVEDERE I RISULTATI."
2555 PRINT"■3. PER MODIFICARE LA TABELLA."
2560 PRINT"■4. PER TERMINARE IL PROGRAMMA."
2570 GETA$:IFA$=""THEN2570
2580 IFA$="1"THEN2610
2582 IFA$="2"THEN2000
2585 IFA$="3"THEN2610
2590 IFA$="4"THEN2700
2600 GOTO2570
2610 PRINT"■"
2620 RI=(6+R*2)*40:FORJ=1024TO1023+RI
2630 POKEJ,MS(J-1023):POKEJ+54272,14:NEXT
2640 IFA$="1"THEN2500
2650 PRINT"■":FORJ=1TO6+R*2:PRINT:NEXT
2660 FORJ=1TOR:FORI=1TO3:T(J,I)=T0(J,I):NEXTI
2670 C(J)=C0(J):NEXTJ
2680 FORJ=1TO3:B(J)=B0(J):NEXT
2690 GOTO270
2700 PRINT"■":POKE53280,14:END
3000 FORJ=1TO3:T(P1,J)=T(P1,J)/P:NEXT:C(P1)=C(P1)/P
3010 FORI=1TOR:IFI=P1THEN3050
3020 X=T(I,P2)
3030 FORJ=1TO3:T(I,J)=T(I,J)-X*T(P1,J):NEXTJ
3040 C(I)=C(I)-X*C(P1)
3050 NEXTI:X=B(P2)
```

```
3060 FORJ=1TO3:B(J)=B(J)-X*T(P1,J):NEXTJ
3070 B(4)=B(4)-X*C(P1)
3080 FORI=1TOR:T(I,P2)=-S(I)/P:NEXTI
3090 B(P2)=-S(R+1)/P:T(P1,P2)=1/P
3100 X=H(P2):H(P2)=V(P1):V(P1)=X
3110 RETURN
4000 P1=I
4010 FORJ=1TO3:IFT(P1,J)<-.0001THEN4030
4020 NEXTI:PRINT"IL PROBLEMA NON HA SOLUZIONE.":GOTO2500
4030 P2=J
4040 FORI=1TOR:S(I)=T(I,P2):NEXTI
4050 S(R+1)=B(P2):M2=C(P1)/T(P1,P2)
4060 FORI=P1TOR:IFT(I,P2)<=.0001THEN4090
4070 IF(C(I)/T(I,P2))>M2THEN4090
4080 P1=I:M2=C(I)/T(I/P2)
4090 NEXTI:P=T(P1,P2):GOSUB3000
4100 RETURN
5000 PL=983+NR*40+NC:UL=PL+LU-1:LO=PL:W=1
5010 W=-W:C=PEEK(LO)+128*W:POKELO,C:POKELO+54272,14
5020 FORT=1TO200:NEXT
5030 GETA$:IFA$=""THEN5010
5035 IFW=-1THENC=C+128
5040 IFA$=CHR$(29)THEN5110
5050 IFA$=CHR$(157)THEN5120
5060 IFA$=CHR$(13)THEN5130
5070 C=ASC(A$):IFC<65THENC=C+64
5080 POKELO,C+64:POKELO+54272,14
5090 IFLO<ULTHENLO=LO+1
5100 W=1:GOTO5010
5110 POKELO,C:IFLO<ULTHENLO=LO+1
5115 W=1:GOTO5010
5120 POKELO,C:IFLO>PLTHENLO=LO-1
5125 W=1:GOTO5010
5130 POKELO,C:E$=""
5140 FORW=PLTOUL:C=PEEK(W)-128:IFC<32THENC=C+64
5150 E$=E$+CHR$(C):NEXTW:RETURN
6000 LS=983+NR*40+NC:POKELS+54272,14:RETURN
```

La linea 30 modifica il colore del bordo e dimensiona la matrice MS( ) che dovrà accogliere il contenuto della parte dello schermo con la tabella dei dati. Quest'ultima ha un numero standard di colonne mentre le righe che la compongono vengono stabilite con l'istruzione 70 (variabile R).

Le linee 90-150 predispongono la "maschera" che dovrà accogliere i dati in modo ordinato, secondo lo schema previsto e limitando i vari campi a ben determinate lunghezze. L'introduzione dei dati avviene iniziando dalla linea successiva (160); la subroutine 5000, in essa chiamata, simula l'istruzione INPUT permettendo, tuttavia, di specificare il numero di riga NR, il numero di colonna NC e la lunghezza del campo LU; DE$( ) memorizza gli elementi descrittivi della prima colonna.

Nelle istruzioni 170-200 vengono memorizzati gli altri dati della tabella; T( ) sono le quantità, C( ) i costi e B( ) le quantità minime richieste.

Poiché, come è stato detto, gli elementi della tabella vengono modificati durante l'elaborazione, essi vengono salvati nelle matrici T0( ), C0( ) e B0( ) per poterli richiamare ed eventualmente modificare per

un'ulteriore esecuzione del programma. Se i dati vengono confermati (istruzione IF THEN in 230) si passa alla routine di calcolo 1000 altrimenti si entra nel modo edit (righe 260-450). Quest'ultimo prevede l'uso dei tasti di controllo cursore e i tasti di funzione f1/f2, cioè il primo in alto, e f7/f8, l'ultimo in basso. Il controllo della tastiera avviene con l'istruzione GET di linea 290 e le successive IF THEN; CHR$(29) è il codice del cursore a destra, CHR$(157) è quello del cursore a sinistra, CHR$(17) è del cursore verso il basso, CHR$(145) è del cursore verso l'alto. La variabile J indica il numero di righe e K il numero di colonne della tabella.
Gli altri codici nelle istruzioni 340 e 345 si riferiscono ai tasti di funzione accompagnati o meno dal tasto SHIFT. L'istruzione POKE alla linea 280 crea un cursore giallo che indica all'utente in quale campo si trova; premendo il tasto di funzione f1 oppure f2 lo stesso campo può essere modificato. I tasti f7 o f8 fanno uscire dal modo *edit* e il programma può proseguire alla linea 1000. La linea 1010 memorizza il contenuto dello schermo (variabile MS(J)) mentre le successive (1020-1030) inizializzano alcune variabili di controllo. Il ciclo principale occupa tutte le linee seguenti fino alla 1180; l'algoritmo seguito è quello esposto nella parte iniziale.
Le linee 2000-2050 stampano i risultati e da questi, premendo un tasto qualsiasi, si accede al menù per le possibili continuazioni. Il programma termina con l'istruzione 2700.
L'ultima parte del listato è occupata dalle subroutine 3000 e 4000 utilizzate nel ciclo principale di elaborazione. La subroutine 5000, come si è detto, ha funzione di *data entry* e permette anche di modificare gli elementi della tabella dopo l'introduzione dei dati; essa presuppone che vengano specificate le variabili NR, NC e LU prima della sua chiamata.
L'ultima brevissima subroutine, la 6000, cancella il cursore giallo che contraddistingue il modo *edit* ristabilendo il carattere in *reverse* presente in una data locazione della mappa video prima della comparsa del cursore.

Proposte operative

Nella parte introduttiva del programma è già stato proposto un esempio di utilizzazione; ora vediamone un secondo.
Supponiamo che si debba organizzare una spedizione per la quale è necessario un trasferimento a mezzo di elicotteri. Sono disponibili due tipi di elicotteri, uno del tipo *A* omologato al trasporto di 6 persone e 4 q di merci e un altro, del tipo *B*, omologato al trasporto di 9 persone e 2 q di merci.

Il costo del noleggio è di $ 3000 per il tipo *A* e $ 3200 per il tipo *B*. Quanti e quali elicotteri si dovranno noleggiare per trasportare 42 persone e 16 q di merci con la minor spesa possibile?
Dato il RUN, chiediamo di usare una tabella con 2 righe, per i due tipi di mezzi disponibili. La tabella conterrà una colonna in eccedenza rispetto alle nostre necessità; essa verrà lasciata libera. Dopo l'introduzione dei dati la tabella avrà dunque il seguente aspetto:

DESCR.	QTA.1	QTA.2	QTA.3	COSTI
TIPO A	6	4		3000
TIPO B	9	2		3200
QTA. MIN.	42	16		

Se si è commesso qualche errore, si risponde N alla richiesta di conferma dei dati, entrando automaticamente nel modo *edit*. Eseguita la correzione, l'elaborazione prosegue dopo che si è premuto il tasto di funzione f7/f8.
Passato qualche istante, ecco la risposta:

```
IL MINIMO COSTO È 17100
OTTENUTO CON LE SEGUENTI QUANTITÀ:
TIPO B  3
TIPO A  2.5
ECCEDENZA QTA. 3 = 0
```

Poiché un risultato è frazionario ed essendo evidente l'impossibilità di noleggiare 1/2 elicottero, le quantità andranno arrotondate all'intero. Sarebbe tuttavia errata la risposta: 3 elicotteri del tipo *A* e 3 del tipo *B* poiché il minor costo si realizza con 2 elicotteri del tipo *A* e 4 del tipo *B*, arrotondando la quantità frazionaria all'intero inferiore piuttosto che a quello superiore e aumentando opportunamente la seconda quantità. Come si vede, il programma perde molta della sua efficacia quando i risultati vanno ricercati limitatamente ai numeri interi perché in tal caso fornisce solo un'indicazione di massima e costringe ad ulteriori calcoli e verifiche. Invece, quando le grandezze coinvolte possono assumere anche valori decimali, i risultati ottenuti sono senz'altro attendibili.

CAPITOLO CINQUE

Calcolo combinatorio

Secondo la definizione classica, la probabilità che si verifichi un evento è data dal rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero di casi possibili, purché tutti i casi siano ugualmente probabili. Per esempio, la probabilità di ottenere sei, lanciando un dado ben tarato, è 1/6 e la probabilità di ottenere un numero pari è 3/6, cioè 1/2.
Talvolta, tuttavia, calcolare il numero di casi possibili potrebbe presentare qualche difficoltà. Nel gioco del poker, quante differenti mani si possono formare? Qual è la probabilità di ricevere una scala massima di cuori servita?
In questi problemi non è necessario, e talvolta sarebbe praticamente impossibile, enumerare tutti i casi possibili ma ci viene in aiuto il calcolo combinatorio.

DISPOSIZIONI E PERMUTAZIONI

Come la maggior parte delle routine presenti in questo libro, anche quella per creare le disposizioni semplici, utilizzata nel programma che segue, è del tutto originale e non costituisce un adattamento da altri autori.
Dati n oggetti, si chiamano disposizioni semplici tutti i gruppi che si possono formare prendendoli a k a k, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri o per qualche oggetto o per l'ordine con cui gli oggetti sono disposti. K deve essere minore o al massimo uguale a n; in ogni gruppo un oggetto può comparire una sola volta, cioè non sono ammesse ripetizioni. Quando $k = n$, ogni gruppo contiene tutti gli n og-

getti e i gruppi differiscono tra di loro solo per l'ordine con cui compaiono gli oggetti. Gli anagrammi sono un esempio di permutazione semplice.
Poiché le permutazioni sono un caso particolare delle disposizioni, nel programma una sola routine svolge entrambe le funzioni e, nell'esposizione, ci riferiremo in generale alle disposizioni semplici.
Il numero delle disposizioni è:

$$(1) \quad D_{n,k} = n \times (n-1) \times (n-2) \times ..... \times (n-k-2) \times (n-k-1)$$

Per esempio, per $n = 4$ e $k = 3$, risulta:

$$D_{2,3} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

Come si vede è semplicissimo calcolare il numero delle disposizioni. Più difficile è creare un programma Basic in grado di scrivere tutti gruppi di n oggetti presi a k a k con n e k variabili.
Se indichiamo con a_1, a_2, a_3, a_4 i quattro oggetti, le 24 disposizioni semplici sono:

$a_1a_2a_3$	$a_2a_1a_3$	$a_3a_1a_2$	$a_4a_1a_2$
$a_1a_2a_4$	$a_2a_1a_4$	$a_3a_1a_4$	$a_4a_1a_3$
$a_1a_3a_2$	$a_2a_3a_1$	$a_3a_2a_1$	$a_4a_2a_1$
$a_1a_3a_4$	$a_2a_3a_4$	$a_3a_2a_4$	$a_4a_2a_3$
$a_1a_4a_2$	$a_2a_4a_1$	$a_3a_4a_1$	$a_4a_3a_1$
$a_1a_4a_3$	$a_2a_4a_3$	$a_3a_4a_2$	$a_4a_3a_2$

Come si vede, per evitare ripetizioni ed avere la certezza di aver scritto in modo corretto tutti i gruppi si è seguito un certo criterio. Vediamolo attentamente perché esso è alla base del metodo adottato nella programmazione.
Stabiliamo di scrivere gli elementi di un gruppo, iniziando con gli oggetti aventi indice inferiore, pertanto al primo posto troveremo prima a_1, poi a_2 ecc.
È importante la seguente considerazione. Si può affermare che il primo elemento di ogni gruppo possiede quattro gradi di libertà, infatti sarà uno dei quattro oggetti.
Il secondo elemento, poiché non sono ammesse ripetizioni, possiede tre gradi di libertà, infatti, fissato l'oggetto al primo posto, al secondo sarà inserito solo uno degli altri tre oggetti. Analogamente, il terzo elemento ha due gradi di libertà, ecc.
Formato il primo gruppo si prosegue cambiando l'ultimo elemento, quello con minor grado di libertà; quando esso ha assunto i due possi-

bili valori, è necessario variare l'elemento con grado di libertà immediatamente superiore, controllando ogni volta che non ci siano ripetizioni.

Nel programma N è il numero degli oggetti, K la classe e J = $N - K + 1$ è il minore dei fattori nella formula (1) vista in precedenza.

I contatori CT(X) hanno l'indice uguale ai gradi di libertà dell'elemento del gruppo a cui si riferiscono. Essi vengono inizializzati a 1 e riportati a questo valore quando risulta CT(X) > X, cioè quando l'elemento ha assunto tutti i valori consentiti dal suo grado di libertà. Se la classe è 3, come nel nostro esempio, altrettante sono le variabili di controllo, nell'ordine: CT(4), CT(3), CT(2). X inizialmente prende il valore minore, cioè 1; si incrementa CT(2) finché non è maggiore di 2; poi si pone CT(2) = 1 e si incrementa CT(3) finché il suo valore non è maggiore di 3; si riporta CT(3) uguale a 1 e si prosegue incrementando CT(4).

Gli elementi che formano i gruppi sono caricati nel vettore P(I); anche in questo caso l'indice è uguale al grado di libertà dell'elemento corrispondente. Sempre con riferimento a 4 oggetti presi a tre a tre P(I) viene inizializzato con i valori 1, 2, 3. Per la stampa delle lettere dell'alfabeto basta riferirsi al numero di codice ASCII con l'istruzione CHR$(P(I) + 64); se P(I) = 1 è stampata la lettera A (codice 65), se P(I) = 2 viene stampata la lettera B (codice 66), e così via.

Quando viene incrementato il contatore CT(X) si incrementa anche P(X) con la convenzione che, se risulta P(X) > N, P(X) assume il valore più basso diverso da quello attribuito in quel momento agli elementi con grado di libertà superiore. Si controlla poi l'eventuale ripetizione di oggetti. Ad esempio, se l'ultima disposizione trovata è $a_1a_3a_4$ sarà CT(4) = 1, CT(3) = 2, CT(2) = 2 e P(4) = 1, P(3) = 3, P(2) = 4.

Il programma prosegue incrementando CT(2); poiché il nuovo valore supera il suo stesso indice, essa viene riportata uguale a 1 e si passerà a incrementare sia CT(3) che l'elemento con lo stesso indice P(3) controllando che il nuovo valore non sia uguale a quello dell'elemento con indice immediatamente superiore. Infine si controlla che l'elemento P(2) non abbia lo stesso valore di quelli con indice superiore, nel qual caso gli verrà attribuito il valore più piccolo tra quelli per così dire liberi. Al termine del ciclo i nuovi valori dei vettori sono 1, 3, 1 per CT(X) e 1, 4, 2 per P(X), corrispondenti, questi ultimi, agli oggetti a_1 a_4 a_2 (si veda la figura 13). I vettori CT(X) e P(X) non sono stati dimensionati ed i loro indici devono essere pertanto non maggiori di 10. Naturalmente è possibile dimensionarli diversamente, aggiungendo l'istruzione DIM e modificando le istruzioni di protezione dopo l'input del numero degli oggetti N.

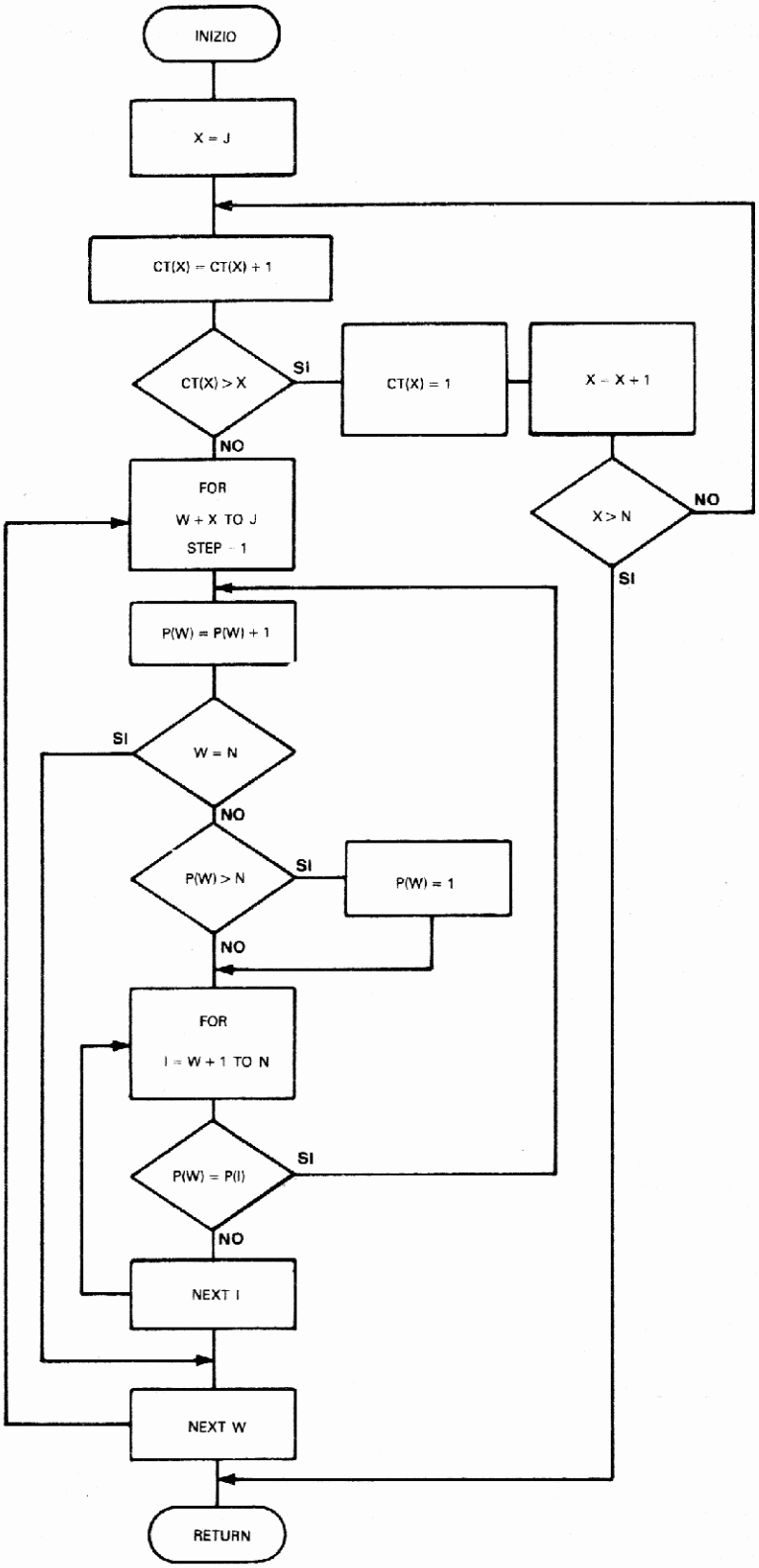

INIZIO
X = J
CT(X) = CT(X) + 1
CT(X) > X
SI
CT(X) = 1
X = X + 1
NO
FOR
W + X TO J
STEP 1
X > N
NO
SI
P(W) = P(W) + 1
W = N
SI
NO
P(W) > N
SI
P(W) = 1
NO
FOR
I = W + 1 TO N
P(W) = P(I)
SI
NO
NEXT I
NEXT W
RETURN

Fig. 13

Ricordiamo tuttavia che il numero delle disposizioni aumenta velocemente all'aumentare di N ed è alquanto improbabile che qualcuno senta il desiderio di trascorrere qualche ora al computer per vedere sfilare anche solo le 5040 disposizioni semplici di 10 oggetti della classe 4.

```
10 REM   DISPOSIZIONI SEMPLCI
20 REM ************************
30 POKE53280,6
100 PRINT"■■■■■"
110 PRINT"     ____________________________________"
120 PRINT"     ■ *** CALCOLO COMBINATORIO *** "
130 PRINT"     | "SPC(28)" |"
140 PRINT"     | "SPC(28)" |"
150 PRINT"     | "SPC(28)" |"
160 PRINT"     |    1. PER LE DISPOSIZIONI     |"
170 PRINT"     | "SPC(28)" |"
180 PRINT"     |    2. PER LE PERMUTAZIONI     |"
190 PRINT"     | "SPC(28)" |"
200 PRINT"     |    3. PER FINIRE.             |"
210 PRINT"     | "SPC(28)" |"
220 PRINT"     | "SPC(28)" |"
230 PRINT"     |____________________________________|"
240 GETK$:IFK$=""THEN240
250 IFK$="1"THEN1000
260 IFK$="2"THEN2000
270 IFK$="3"THEN3000
280 GOTO240
1000 REM    ***  DISPOSIZIONI  ***
1010 PRINT"■      VUOI LE SPIEGAZIONI? (Y/N)"
1020 GETK$:IFK$=""THEN1020
1030 IFK$="Y"THEN1060
1040 IFK$="N"THEN1500
1050 GOTO1020
1060 PRINT"■SIANO DATI QUATTRO OGGETTI:"
1070 PRINTTAB(12)"■■■A■  ■■B■  ■■C■  ■■D■■"
1080 PRINT"■PRENDENDOLI A TRE A TRE SI FORMINO DEI"
1090 PRINT"GRUPPI CHE DIFFERISCANO O PER QUALCHE"
1100 PRINT"OGGETTO O PER L'ORDINE IN CUI SONO"
1110 PRINT"DISPOSTI. SCRIVIAMOLI...■"
1120 GOSUB4000
1130 N=4:K=3:J=N-K+1:GOSUB4100
1140 C=0:PRINT"■"
1150 C=C+1:IFC>24THEN1240
1160 IFC>9THEN1180
1170 PRINT" ";
1180 PRINTC;"- ";
1190 FORI=0TOK-1:PRINT" ■"CHR$(P(N-I)+64);"■ ";:NEXT
1200 IFC/2=INT(C/2)THEN1220
1210 PRINT" ",:GOTO1230
1220 PRINT
1230 GOSUB4200:GOTO1150
1240 PRINT"■":GOSUB4000
1250 PRINT"■IN QUESTO ESEMPIO IL NUMERO DELLE DISPO-"
1260 PRINT"■SIZIONI E':"
1270 PRINTTAB(8)"■D(4,3) = 4*3*2 = 24"
1280 PRINT"■IN GENERALE, PRESI N OGGETTI A K A K."
1290 PRINT"O DELLA CLASSE K, IL NUMERO DELLE DISPO-"
1300 PRINT"■SIZIONI SEMPLICI E':"
1310 PRINT"■  D(N,K) = N*(N-1)*(N-2)*...*(N-K+1)."
1320 GOSUB4000:GOTO100
```

```
1500 PRINT"  CALCOLO DELLE DISPOSIZIONI SEMPLICI  "
1505 PRINT"QUANTI SONO GLI OGGETTI?"
1510 INPUT"PREGO, NON PIU' DI 10 ";N
1520 IFN>10THEN1510
1530 PRINT"QUANTI OGGETTI FORMANO OGNI GRUPPO?"
1540 INPUT"K<N> ";K:IFK>NTHEN1540
1550 D=N:FORI=1TOK-1:D=D*(N-I):NEXT
1560 PRINT"IL NUMERO DELLE DISPOSIZIONI SEMPLICI"
1570 PRINT"DI";N;"OGGETTI, PRESI A";K;"A";K;", E':"
1580 PRINT"D =";D
1590 PRINT"VUOI VEDERE TUTTE LE DISPOSIZIONI? (Y/N)"
1600 GETK$:IFK$=""THEN1600
1610 IFK$="Y"THEN1640
1620 IFK$="N"THEN100
1630 GOTO1600
1640 J=N-K+1:GOSUB4100:C=0
1650 PRINT"PER RAPPRESENTARE GLI OGGETTI VUOI NUME-"
1660 PRINT"RI O LETTERE? PREMI <N> PER I NUMERI E"
1670 PRINT"<L> PER LE LETTERE."
1680 GETK$:IFK$=""THEN1680
1682 IFK$="N"THENTP=48:GOTO1690
1684 IFK$="L"THENTP=64:GOTO1690
1686 GOTO1680
1690 PRINT""
1700 C=C+1:IFC<=DTHEN1730
1710 PRINT"":GOSUB4000:IFFG=1THEN2200
1720 GOTO100
1730 PRINTTAB(5-LEN(STR$(C)));C;"- ";
1740 FORI=0TOK-1:
1750 PRINT"";CHR$(P(N-I)+TP);" ";
1760 NEXTI:PRINT""
1770 IFC/10<>INT(C/10)THEN1790
1780 GOSUB4000:PRINT""
1790 GOSUB4200:GOTO1700
2000 REM    ***  PERMUTAZIONI  ***
2010 PRINT"          PREMI:"
2020 PRINT"       1. PER LE SPIEGAZIONI"
2030 PRINT"       2. PER LE APPLICAZIONI"
2040 PRINT"       3. PER GLI ANAGRAMMI"
2042 FORTM=1TO1000:NEXT
2045 GETK$:IFK$=""THEN2045
2050 IFK$="1"THEN2100
2060 IFK$="2"THEN2300
2070 IFK$="3"THEN2500
2080 GOTO2050
2100 PRINT"SIANO DATI TRE OGGETTI:"
2110 PRINTTAB(10)"A  B  C"
2120 PRINT"USANDOLI TUTTI E TRE, QUANTI GRUPPI SI"
2130 PRINT"POSSONO FORMARE IN MODO CHE DIFFERISCANO"
2140 PRINT"SOLO PER L'ORDINE DEGLI OGGETTI?"
2150 GOSUB4000
2160 PRINT"VEDIAMO ..."
2170 N=3:K=3:J=1:C=0:D=6:GOSUB4100
2180 FG=1:TP=64:GOTO1690
2200 FG=0:PRINT""
2210 PRINT"QUESTI GRUPPI SI CHIAMANO PERMUTAZIONI"
2220 PRINT"SEMPLICI, ESSI SONO LE DISPOSIZIONI DEI"
2230 PRINT"TRE OGGETTI PRESI A TRE A TRE."
2240 PRINT"       P(N) = 3*2*1 = 3! = 6"
2250 PRINT"IL NUMERO 3! SI DICE FATTORIALE DEL NU-"
2260 PRINT"MERO 3. GLI ANAGRAMMI SONO UN ESEMPIO DI"
2270 PRINT"PERMUTAZIONI."
2280 GOSUB4000:GOTO100
2300 PRINT"QUANTI SONO GLI OGGETTI DA PERMUTARE?"
2310 INPUT"(PREGO, NON PIU' DI 10) N =";N
2320 IFN>10THEN2310
```

```
2330 P=N
2340 FORI=1TON-1:P=P*(N-I):NEXT
2350 PRINT"■■IL NUMERO DELLE PERMUTAZIONI E':"
2360 PRINT"■P =";STR$(N);"! =";P
2370 PRINT"■■   VUOI VEDERE LE PERMUTAZIONI? (Y/N)"
2380 GETK$:IFK$=""THEN2380
2390 IFK$="Y"THEN2420
2400 IFK$="N"THEN100
2410 GOTO2380
2420 K=N:GOTO1640
2500 PRINT"□SCRIVI LA PAROLA DA ANAGRAMMARE"
2510 INPUT"■(NON PIU' DI 10 LETTERE)";PA$
2520 IFLEN(PA$)>10THEN2510
2530 N=LEN(PA$):K=N:J=1:P=1:C=0
2540 FORI=1TON:A$(I)=MID$(PA$,I,1):P=P*I:NEXT
2550 PRINT"■■CON QUESTA PAROLA SI POSSONO FORMARE"
2560 PRINT"■";P;"ANAGRAMMI."
2570 PRINT"■■ORA TE LI MOSTRO. OGNI VOLTA CHE BATTI"
2580 PRINT"UN TASTO NE COMPARE UNO."
2590 PRINT"■QUANDO NON VUOI PIU' CONTINUARE PREMI"
2600 PRINT"IL TASTO DI FUNZIONE <F1>."
2610 GOSUB4000:GOSUB4100:PRINT"■"
2620 C=C+1:IFC<=PTHEN2640
2630 PRINT"□■■HO TERMINATO!":GOSUB4000:GOTO100
2640 PRINTTAB(5-LEN(STR$(C)));C;"- ■ ";
2650 FORI=0TOK-1:PRINT"■"A$(P(N-I));:NEXT:PRINT"■ ■"
2660 GETK$:IFK$=""THEN2660
2670 IFASC(K$)=133THENPRINT"□":GOTO100
2680 GOSUB4200:GOTO2620
3000 PRINT"□":POKE53280,14:END
4000 PRINT"■■■      PREMI UN TASTO PER CONTINUARE"
4010 GETK$:IFK$=""THEN4010
4020 PRINT"□                                        "
4030 RETURN
4100 FORI=JTON:CT(I)=1:P(I)=N+1-I:NEXT
4110 RETURN
4200 X=J
4210 CT(X)=CT(X)+1:IFCT(X)<=XTHEN4240
4220 CT(X)=1:X=X+1:IFX>NTHEN4300
4230 GOTO4210
4240 FORW=XTOJSTEP-1
4250 P(W)=P(W)+1:IFW=NTHEN4290
4260 IFP(W)>NTHENP(W)=1
4270 FORI=W+1TON:IFP(W)=P(I)THEN4250
4280 NEXTI
4290 NEXTW
4300 RETURN
```

Il titolo e il menù sono stati posti congiuntamente alle linee 30-280. La sezione sulle disposizioni si apre alla linea 1000 e, a richiesta, si possono avere le spiegazioni relative all'argomento; a titolo d'esempio: vengono stampate le 24 disposizioni semplici ottenute con quattro oggetti presi a tre a tre. I simboli particolari presenti nell'istruzione 1070 sono quelli del controllo cursore, dei caratteri in *reverse* (REV ON e REV OFF) e del controllo colore (CTRL8 = Giallo).
La ricerca dei gruppi è svolta dalla subroutine 4100 e 4200, le stesse utilizzate quando sarà l'utente a stabilire il numero degli oggetti e la classe K; semplicemente, prima di richiamare la routine, viene posto N = 4 e K = 3 (linea 1130). Le istruzioni 1200-1210 servono a stam-

pare due gruppi per ogni riga in modo che al termine siano visibili tutte e 24 le disposizioni per meglio esaminarle. Alla riga 1500 inizia la parte applicativa. Il ciclo FOR NEXT (linea 1550) calcola il numero delle disposizioni che viene poi stampato alle righe successive. I gruppi che costituiscono le disposizioni sono scritti solo su richiesta e la variabile TP assume i valori 48 o 64 a seconda che gli oggetti siano rappresentati con cifre o lettere; nel primo caso infatti l'istruzione PRINT di riga 1750 stamperà i caratteri con numero di codice ASCI immediatamente superiori a 48, cioè 1, 2, 3 ecc.; nel secondo caso invece i codici ASCII risulteranno 65, 66, 67 ecc. corrispondenti alle lettere A, B, C ecc.

La condizione posta alla linea 1770 serve a scrivere i dati in blocchi da dieci; scritto un blocco il programma si ferma e riparte alla pressione di un tasto qualsiasi. Lo scopo è quello di dare all'utente il tempo di esaminare quanto appare sullo schermo, senza costringerlo a bloccare l'esecuzione del programma per poi farlo proseguire con il comando CONT. La variabile FG di linea 1710 è necessaria poiché quel ciclo di stampa è utilizzato anche dalla sezione 2 del programma per stampare le permutazioni. Poiché queste sono un caso particolare di disposizioni in cui la classe K è uguale al numero degli oggetti N, basta porre questa condizione (linea 2420) e rimandare il programma alla sezione precedente. Alle linee 2330-2340 P è il numero delle permutazioni ottenuto calcolando il fattoriale di N.

L'ultima parte è dedicata alla scrittura degli anagrammi di parole formate da non più di 10 lettere. Un anagramma si ottiene permutando le lettere di una parola. Da un punto di vista enigmistico esso dovrebbe consistere in un secondo termine di senso compiuto, così come da "caro" si può ricavare "arco", oppure "orca"; ma il Commodore 64, che possiede solo il fine senso letterario che può avere un computer, stamperà indiscriminatamente tutte le permutazioni, comprese parole come "rcoa" e "roac". Il vero cuore del programma è la routine 4200 (si veda il diagramma di figura 13), essa viene utilizzata dopo che le variabili con indice CT e P sono state inizializzate nell'altra routine di linea 4100.

CT conta quante volte è stato cambiato l'elemento che occupa una certa posizione nel gruppo; l'istruzione 4210 controlla che un certo elemento non venga cambiato più del necessario. Se un elemento ha due gradi di libertà, potrà cambiare solo due volte, dopo di che ne verrà cambiato un altro; per questa ragione CT(2) non può mai essere maggiore di due, analogamente CT(3) non può mai essere maggiore di tre e così via. L'oggetto che fa parte di un gruppo viene cambiato con l'istruzione 4250, il ciclo FOR NEXT (4270-4280) controlla che non si siano verificate ripetizioni.

Vediamo ora un esempio pratico di utilizzazione.

```
VUOI VEDERE TUTTE LE DISPOSIZIONI? (Y/N)
<Y>
PER RAPPRESENTARE GLI OGGETTI VUOI NUME-
RI O LETTERE? PREMI <N> PER I NUMERI E
<L> PER LE LETTERE.
<L>
  1 - A B C
  2 - A B D
  3 - A B E
  4 - A C B

 59 - E D A
 60 - E D B

  PREMI UN TASTO PER CONTINUARE
```

COMBINAZIONI SEMPLICI

Il programma è strutturato come il precedente: la prima parte è riservata alle spiegazioni, la seconda alle applicazioni. Le combinazioni semplici costituiscono un sottoinsieme delle disposizioni semplici essendo formate da gruppi di n oggetti presi a k a k in modo tale che differiscano solo per almeno un oggetto ma non per l'ordine in cui gli oggetti sono disposti. Il numero delle combinazioni è dato da:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{K!}$$

Nel caso particolare in cui sia $n = 5$ e $k = 3$, il numero delle combinazioni semplici è:

$$C_{5,3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

Un'originale routine, di cui si riporta il diagramma a blocchi (figura 14), fornisce, oltre al numero delle combinazioni, anche la loro stampa per ogni valore di n inferiore o uguale a venti. Per $n > 20$ è necessario dimensionare diversamente il programma nell'istruzione DIM e in quella che controlla se n è ≤ 20.
Il concetto di base consiste nel caricare i valori numerici da attribuire a ogni elemento di un singolo gruppo in una variabile con indice E(X) compreso tra 1 e k. Il vettore E(X) viene inizializzato in modo che i suoi elementi abbiano lo stesso valore dei loro indici: E(1) = 1, E(2) = 2, E(3) = 3 ecc.; poi si aumenta la variabile con indice maggiore finché il suo valore non è uguale a n, dopo di che si incrementa il

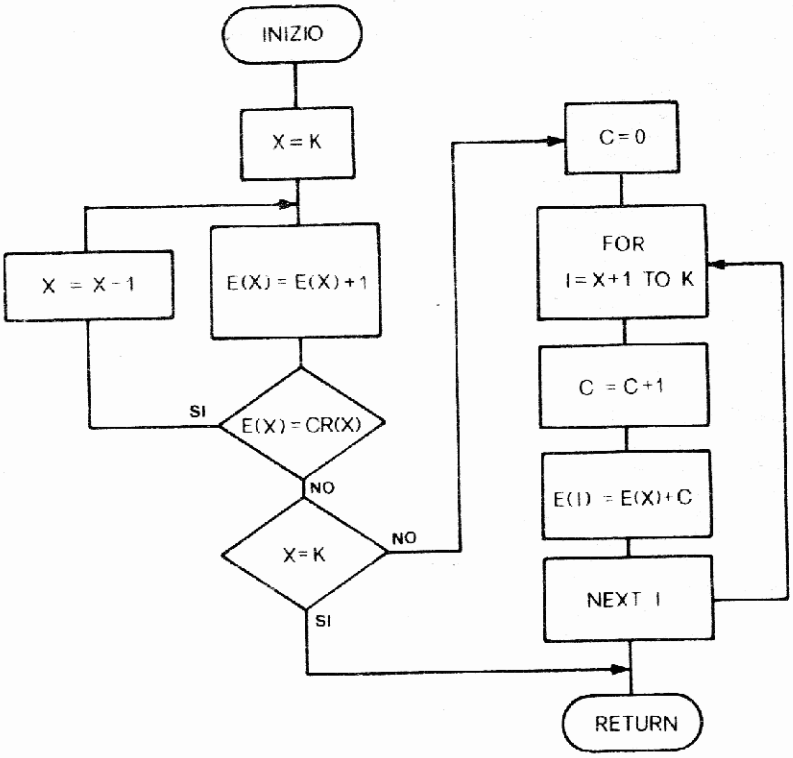


Fig. 14

valore della variabile con indice immediatamente inferiore. Nell'esempio delle combinazioni di 5 oggetti di classe 3, la routine attribuisce successivamente al vettore E(X) i seguenti valori:

	E(1)	E(2)	E(3)		E(1)	E(2)	E(3)
1 –	1	2	3	6 –	1	4	5
2 –	1	2	4	7 –	2	3	4
3 –	1	2	5	8 –	2	3	5
4 –	1	3	4	9 –	2	4	5
5 –	1	3	5	10 –	3	4	5

Come si vede, l'elemento E(1) può raggiungere al massimo il valore 3, E(2) al massimo il valore 4 ecc.; tali massimi sono memorizzati nel vettore CR(X). Ogni qual volta un elemento raggiunge il suo valore massimo si passa a incrementare l'elemento con indice immediatamente inferiore mentre a tutti i seguenti si attribuiscono valori progressivi. In fase di stampa, per evitare uno scrolling incontrollato, dopo ogni serie di dieci combinazioni il programma si arresta in attesa che venga premuto un tasto.

```
10 REM    COMBINAZIONI SEMPLICI
20 REM ***************************
30 POKE53280,6:DIM E(20),CR(20)
40 PRINT"█████████         ______________________________"
50 PRINT"       █   COMBINAZIONI SEMPLICI    "
60 PRINT"       | "SPC(25)" |"
70 PRINT"       | "SPC(25)" |"
80 PRINT"       |   PREMI:"SPC(17)" |"
90 PRINT"       | "SPC(25)" |"
100 PRINT"       |   1. PER LE SPIEGAZIONI    |"
110 PRINT"       | "SPC(25)" |"
120 PRINT"       |   2. PER LE APPICAZIONI    |"
130 PRINT"       | "SPC(25)" |"
140 PRINT"       |   3. PER FINIRE"SPC(10)" |"
150 PRINT"       | "SPC(25)" |"
160 PRINT"       |___________________________|"
170 GETK$:IFK$=""THEN170
180 IFK$="1"THEN1000
190 IFK$="2"THEN2000
200 IFK$="3"THENPRINT"█":POKE53280,14:END
210 GOTO170
1000 PRINT"█SIANO DATI 5 OGGETTI:"
1010 PRINTTAB(11)"██_  _  _  _  _"
1020 PRINTTAB(11)"█A█  █B█  █C█  █D█  █E██"
1030 PRINT"██CON ESSI SI VOGLIONO FORMARE GRUPPI DI 3"
1040 PRINT"█ELEMENTI CHE DIFFERISCANO ALMENO PER UN"
1050 PRINT"OGGETTO."
1060 PRINT"█SCRIVIAMOLI ...":GOSUB3000
1070 PRINTTAB(10)"███_ _ _         _ _ _"
1080 PRINT"       1 - █A█ █B█ █C█      6 - █A█ █D█ █E█"
1090 PRINTTAB(10)"_ _ _         _ _ _"
1100 PRINT"       2 - █A█ █B█ █D█      7 - █B█ █C█ █D█"
1110 PRINTTAB(10)"_ _ _         _ _ _"
1120 PRINT"       3 - █A█ █B█ █E█      8 - █B█ █C█ █E█"
1130 PRINTTAB(10)"_ _ _         _ _ _"
1140 PRINT"       4 - █A█ █C█ █D█      9 - █B█ █D█ █E█"
1150 PRINTTAB(10)"_ _ _         _ _ _"
1160 PRINT"       5 - █A█ █C█ █E█     10 - █C█ █D█ █E██"
1170 GOSUB3000
1180 PRINT"█QUESTI GRUPPI SONO LE COMBINAZIONI SEM-"
1190 PRINT"PLICI DI 5 OGGETTI PRESI A 3 A 3, O DEL-"
1200 PRINT"█LA CLASSE 3."
1210 PRINT"█LE COMBINAZIONI SONO UN SOTTOINSIEME"
1220 PRINT"DELLE DISPOSIZIONI. IL LORO NUMERO E'"
1230 PRINT"DATO DALLA SEGUENTE RELAZIONE:██"
1240 PRINTTAB(9)"D(N,K)    N*(N-1)*...*(N-K+1)
1250 PRINT"C(N,K) = ──────── = ──────────────────────"
1260 PRINTTAB(9)"  K!      K*(K-1)*(K-2)*...*2*1"
1270 GOSUB3000
1280 PRINT"█NEL NOSTRO ESEMPIO:██"
1290 PRINTTAB(9)"D(5,3)    5*4*3    60"
1300 PRINT"C(5,3) = ──────── = ─────── = ── = 10"
1310 PRINTTAB(9)"  K!      3*2*1     6"
1320 GOSUB3000
2000 PRINT"█SCRIVI IL NUMERO DEGLI OGGETTI█"
2010 INPUT"N =";N:N=ABS(INT(N))
2020 PRINT"█DA QUANTI OGGETTI SONO FORMATI I GRUPPI?"
2030 INPUT"K =";K:K=ABS(INT(K))
2040 IFK<1ORK>NTHEN2030
2050 GOSUB3100:REM INIZIALIZZA I VETTORI
2060 GOSUB3200:REM CALCOLA NUMERO COMBINAZIONI
2070 PRINT"██IL NUMERO DELLE COMBINAZIONI E':"
2080 PRINT"██C =";CK
2090 IFN<=20ORK>15THEN2120
2100 PRINT"██SPIACENTE, PER IL VALORE ELEVATO DI N"
2110 PRINT"NON POSSO RAPPRESENTARE LE COMBINAZIONI.":GOSUB3000:GOTO40
```

```
2120 PRINT"■■■■  VUOI VEDERE LE COMBINAZIONI? (Y/N)"
2130 GETK$:IFK$=""THEN2130
2140 IFK$="Y"THEN2170
2150 IFK$="N"THEN40
2160 GOTO2130
2170 CT=0:PRINT"■■■■■"
2180 CT=CT+1:IFCT>CKTHENPRINT"■    (HO TERMINATO)□":GOSUB3000:GOTO40
2190 PRINTTAB(6-LEN(STR$(CT)));CT;"- ";
2200 FORI=1TOK:PRINT"□ ■■■";CHR$(E(I)+64);"■ ";:NEXT:PRINT"■"
2210 IFCT=CKTHEN2180
2220 IFCT/10=INT(CT/10)THENGOSUB3000
2230 GOSUB3300:REM CALCOLA UNA COMBINAZIONE
2240 GOTO2180
3000 PRINT"■■■■      PREMI UN TASTO PER CONTINUARE"
3010 GETK$:IFK$=""THEN3010
3020 PRINT"□                                          □"
3030 RETURN
3100 FORI=1TOK:CR(I)=N-K+I:E(I)=I:NEXT
3110 RETURN
3200 CK=N:KK=1
3210 FORI=1TOK-1:CK=CK*(N-I):KK=KK*(I+1):NEXT
3220 CK=CK/KK:RETURN
3300 X=K
3310 E(X)=E(X)+1:IFE(X)<=CR(X)THEN3330
3320 X=X-1:GOTO3310
3330 IFX=KTHEN3350
3340 C=0:FORI=X+1TOK:C=C+1:E(I)=E(X)+C:NEXT
3350 RETURN
```

Le linee 10-210 modificano il colore del bordo, dimensionano i due vettori E( ) e CR( ) e scrivono il menù inviando poi il programma alle due sezioni operative situate a iniziare dalle righe 1000 e 2000. Nella parte riguardante le spiegazioni viene offerto un esempio di combinazioni semplici ottenute con 5 oggetti della classe 3. Gli oggetti sono costituiti dalle prime cinque lettere dell'alfabeto, scritte in *reverse* e di colore giallo.

Il codice del colore si può vedere tra virgolette alle linee 1010 e 1070 e corrisponde ai tasti CTRL 8. Gli altri simboli particolari più frequenti alle linee 1080-1160 si riferiscono alla stampa in *reverse* (REV ON e REV OFF).

Nella parte applicativa il numero degli oggetti viene memorizzato nella variabile N; la linea 2010 protegge anche il programma nell'eventualità che venga digitato un numero negativo o con cifre decimali.

K è la classe delle combinazioni, ovvero il numero degli oggetti che formano ogni gruppo. La subroutine 3200 calcola il numero delle combinazioni CK. I gruppi, per motivi di tabulazione, non vengono stampati se N o K assumono valori troppo elevati.

Le linee 2170-2240 stampano le combinazioni semplici rappresentando gli oggetti con le prime lettere dell'alfabeto, gialle e in *reverse*. La condizione alla linea 2220 fa in modo che i gruppi vengano stampati dieci alla volta, per facilitarne la lettura; il programma prosegue poi

premendo un tasto qualsiasi. La ricerca degli elementi che formano ogni gruppo è svolta dalla subroutine 3300, chiamata dalla linea 2230. I vettori CR( ) e E( ) vengono in precedenza inizializzati in modo che il primo assuma i valori di controllo N−K+1, N−K+2, N−K+3, ..., N mentre il secondo contiene i numeri progressivi 1, 2, 3, ..., K. Saranno questi ultimi, sommati a 64, a individuare i codici ASCII delle lettere A, B, C ecc. (linea 2200).
Gli elementi E( ) vengono incrementati di un'unità, iniziando da quello con indice maggiore, finché non assumono valori superiori a quelli delle corrispondenti variabili di controllo. Quando ciò accade viene incrementato l'elemento con indice immediatamente inferiore.
Per maggiori dettagli si veda il diagramma a blocchi in figura 14.

Proposta operativa

Vediamo ora un'applicazione riguardante il gioco del lotto. Proponiamoci di voler calcolare la probabilità di indovinare un terno in una routa (le ruote sono le dieci città: Bari, Cagliari, Firenze, Genova, Milano, Napoli, Palermo, Roma, Torino e Venezia). Il metodo potrà essere esteso agli ambi, alle quaterne ecc. I terni sono combinazioni semplici di 90 oggetti (numeri) presi a tre a tre, pertanto il numero di eventi possibili è:

$$C\binom{90}{3} = 117480$$

```
SCRIVI IL NUMERO DI OGGETTI
N =? 90
DA QUANTI OGGETTI SONO FORMATI I GRUPPI?
K =? 3
IL NUMERO DELLE COMBINAZIONI E':
C = 117480
```

Ma attenzione! Nel calcolare la probabilità si deve tenere presente che i numeri estratti sono 5; essi, presi a tre a tre, danno luogo a 10 combinazioni.
Dunque le probabilità di fare terno sono:

$$P = C\binom{5}{3} \times \frac{1}{C\binom{90}{3}} = 10 \times \frac{1}{117480} = \frac{1}{11748}$$

Lo stato paga solo 4250 volte la posta!

DISTRIBUZIONE NORMALE E GAUSSIANA

Alcuni concetti statistici sono applicati anche nell'ambito della misura di una grandezza fisica. In questo campo molti presuppongono che si possano raggiungere risultati assolutamente certi. Ciò non è vero poiché, pur procedendo con la massima accuratezza e precisione, ogni misura è soggetta a limitazioni e ad errori casuali. Se, per esempio, volessimo misurare il periodo di oscillazione di un pendolo, ripetendo l'esperienza più volte, otterremo spesso valori diversi e saremo infine portati a ritenere come più probabile il valore medio.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\,(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$$

Per avere indicazioni sulla distribuzione dei dati attorno alla media, è comunemente usato lo scarto quadratico medio.

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2}$$

Valori piccoli di μ significano che i risultati delle misure si addensano attorno al valor medio, contrariamente i risultati sono dispersi in un intervallo più ampio.
Quando il numero delle prove è elevato (alcune centinaia), riportando in un istogramma le frequenze relative ai vari risultati ottenuti, si ottiene un grafico simile a quello di figura 15.

Il programma che segue consente di dimostrare che una tale distribuzione è in buon accordo con una distribuzione normale e gaussiana. Questa, in termini matematici, è data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-1/2(x - x)^2/\sigma^2}$$

dove la quantità σ è chiamata deviazione standard e, per un numero elevato di misure, coincide con lo scarto quadratico medio.
La funzione $f(x)$ indica quale sia la probabilità che una misura dia per risultato un valore x. Il grafico della funzione è una curva a campana. L'area della superficie racchiusa dalla curva e dall'asse delle x è uguale a 1, mentre l'area delimitata sotto la curva tra due valori a e b è <

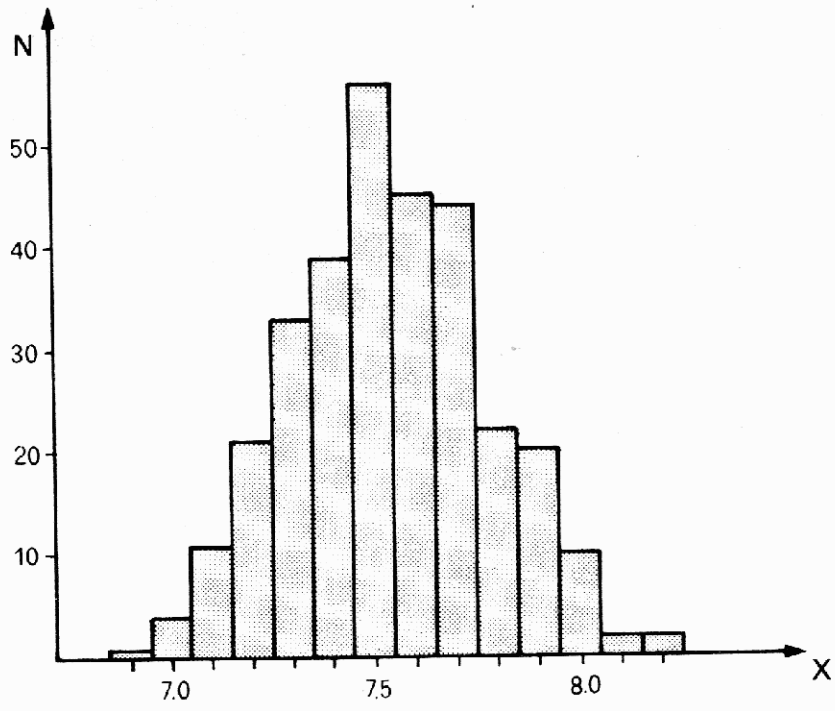


Fig. 15

1 e rappresenta le probabilità che x sia compreso tra a e b. Ricordando il significato geometrico dell'integrale, tale probabilità è:

$$P_x = \int_a^b f(x)\ dx$$

Per esempio si dimostra che una misura ha una probabilità del 68,3 per cento di cadere nell'intervallo $\bar{x} - \sigma$, $\bar{x} + \sigma$. Si veda la figura 16.
Ora vediamo come viene condotto il confronto tra la distribuzione di dati sperimentali e una distribuzione gaussiana.
Innanzitutto, è ovvio, bisogna disporre di dati sperimentali. Questi non possono essere sostituiti con valori casuali generati dal computer, perché questi ultimi, essendo equiprobabili, non godrebbero di una distribuzione gaussiana di probabilità.
Tornando all'esempio della misura del periodo di oscillazione di un pendolo, è necessario ripetere l'esperienza numerosissime volte (200 o 300) e segnare quante volte si ripetono gli stessi risultati. Per avviare il programma è sufficiente scrivere il valore minimo, quanti diversi risultati si sono ottenuti (fino a un massimo di 20) e qual è la minima differenza tra un risultato e l'altro (per esempio: 1/100 di secondo). Il computer chiederà quante volte sono stati ottenuti i singoli risultati. Dopo questa operazione si può accedere a diverse sezioni del pro-

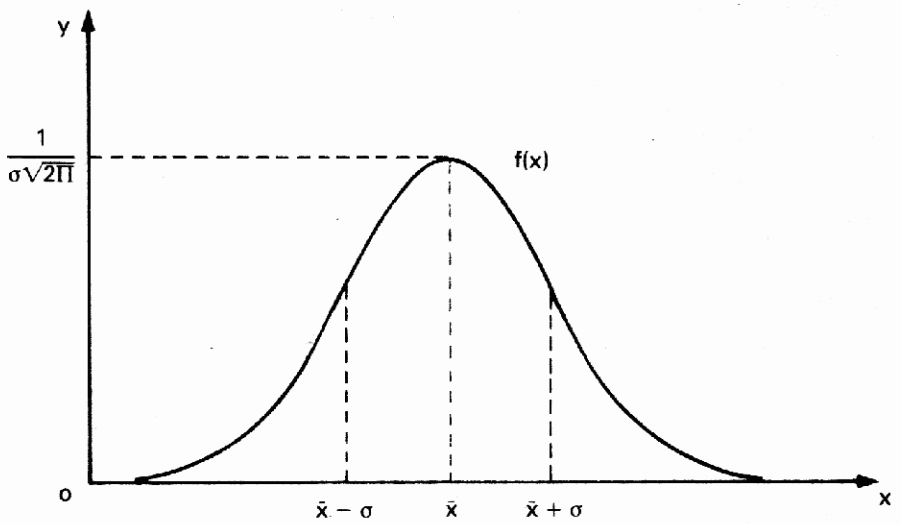


Fig. 16

gramma, tutte indipendenti una dall'altra e che pertanto possono essere eseguite in modo non sequenziale.
Le funzioni svolte sono le seguenti: (1) tabulazione dei risultati e loro rappresentazione in forma di istogramma; (2) calcolo del valore medio; (3) tabulazione degli scarti dalla media; (4) tabulazione degli scarti quadratici; (5) calcolo dello scarto quadratico medio; (6) calcolo delle probabilità che un risultato cada in un dato intervallo; (7) tabulazione delle frequenze teoriche previste per una distribuzione gaussiana; (8) confronto tra l'istogramma dei risultati sperimentali e quello dei valori previsti in base alla funzione di distribuzione normale.
Le principali variabili utilizzate nel programma sono: MI, minimo valore ottenuto nella serie di misure; DX, scarto minimo tra due risultati; N, numero di diversi risultati ottenuti. I singoli risultati sono pertanto: MI, MI + DX, MI + 2DX, MI + 3DX ecc.; il numero delle volte in cui si sono ottenuti questi valori viene caricato nella variabile con indice A(I).
La base è A(0) e corrisponde al risultato MI, A(1) a MI + DX, A(2) al successivo, e così via.
Il totale delle misure risulta:

$$M = \sum_{i=1}^{N-1} A(i)$$

Per il valore medio si usa la relazione:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{N-1} (MI + i \times DX) \times \mathrm{A}(i)$$

Naturalmente questa sommatoria si ottiene con le istruzioni Basic:

```
ME = 0
FOR I = 0 TO N - 1
ME = ME + (MI + I * DX) * A(I)
NEXT I
```

Lo scarto quadratico medio si trova con una formula analoga a quella data in precedenza

$$\mu = \sqrt{1/M \sum_{i=0}^{N-1} A(i) \times (MI + i \times DX - ME)^2}$$

Chiamato per semplicità Z_i ogni risultato precedentemente espresso nella forma $MI + i \times DX$, la probabilità di ottenere l'i-esimo valore è calcolata con la formula:

$$P_i = \frac{DX}{\mu \sqrt{2\,\pi}}\, e^{-1/2(Z_i - x)^2/\mu^2}$$

Le frequenze teoriche, memorizzate nel vettore C(I), sono allora: $M \times P_i$. Il programma fornisce la tabulazione dei vettori A(I) e C(I), cioè dei valori sperimentali e di quelli previsti teoricamente, e il confronto tra gli istogrammi. Il computer dimensiona automaticamente i grafici e li mostra contemporaneamente sullo schermo in due diversi colori. Se l'esperienza è ben condotta e il numero delle misure è sufficientemente grande, si deve notare un accordo tra i due istogrammi.
Infine, il calcolo delle probabilità che un valore cada in un dato intervallo è ottenuto integrando la funzione $f(x)$ con il metodo di Simpson. L'intervallo va specificato nella forma $x \pm h$. Attribuendo a x il valore medio e ad h lo scarto quadratico medio, si ha l'immediata conferma che la probabilità è circa 0,68 cioè il 68 per cento. Per permettere di utilizzare il programma anche a chi non dispone di adeguati risultati sperimentali, si riporta la seguente tabella con i valori ottenuti nel corso di una esercitazione di fisica, tenuta presso l'Università di Padova. I risultati, riguardanti più di trecento misure, si riferiscono alla lunghezza di una colonna di sferette contenute in un tubo di plexiglass e sono dati a meno di una costante.

Z_i (mm)	A(i)
6.9	1
7.0	4
7.1	11
7.2	21
7.3	33
7.4	39
7.5	56
7.6	45
7.7	44
7.8	22
7.9	20
8.0	10
8.1	2
8.2	2

Ai fini di ciò che viene richiesto dal programma è utile ricordare che il valore minimo è 6.9, che lo scarto tra un valore e il successivo è 0.1 mm, che i risultati ottenuti sono 14 e che $A(i)$ sono le frequenze relative ai singoli risultati.

```
10 REM  DISTRIBUZIONE GAUSSIANA
20 REM ************************
30 POKE53280,6:DEFFNP(X)=(.39894/SQ)*EXP((-1/2)*((X-ME)/SQ)↑2)
40 DIMA(20),B(23),C(20)
50 PRINT"■■■■":LC=54272
60 PRINTTAB(4)"┌──────────────────────────────────────┐"
70 PRINTTAB(4)"■        VERIFICA DI UNA              "
80 PRINTTAB(4)"■   DISTRIBUZIONE GAUSSIANA           "
90 PRINTTAB(4)"■└──────────────────────────────────────┘"
100 FORI=1TO11:PRINTTAB(4)"■ "SPC(27)" ■":NEXT
110 PRINTTAB(4)"■┌──────────────────────────────────────┐"
120 IFTT$="ON"THEN200
130 DATA3,5,8,12,16,22,30,38,48,56,62,64,62,56,48,38,30,22,16,12,8,5,3
140 FORI=1TO23:READB(I):NEXT
150 U=7:LS=1830:NC=23:CC=14:GOSUB6000
160 PRINTTAB(4)"└──────────────────────────────────────┘"
170 PRINTTAB(4)"■      <PREMI UN TASTO>              "
180 GETK$:IFK$=""THEN180
190 GOTO500
200 PRINT"■■■■■■■■■■"
210 PRINTTAB(5)"1. FREQUENZE SPERIMENTALI"
220 PRINTTAB(5)"2. VALORE MEDIO"
230 PRINTTAB(5)"3. SCARTI DALLA MEDIA"
240 PRINTTAB(5)"4. SCARTI QUADRATICI"
250 PRINTTAB(5)"5. SCARTO QUADRATICO MEDIO"
260 PRINTTAB(5)"6. PROBABILITA' IN UN DATO"
270 PRINTTAB(8)"INTERVALLO          "
280 PRINTTAB(5)"7. FREQUENZE TEORICHE    "
290 PRINTTAB(5)"8. VERIFICA DELLA        "
```

```
300 PRINTTAB(8)"DISTRIBUZIONE GAUSSIANA"
310 PRINTTAB(5)"9. FINE                    "
320 PRINTTAB(5)"_________________________"
330 PRINTTAB(4)"_____________________________"
340 PRINTTAB(4)"■       <PREMI UN NUMERO>       "
350 GETK$:IFK$=""THEN350
360 SZ=ASC(K$)-48:IFSZ<1ORSZ>9THEN350
370 ONSZGOTO1000,1500,2000,2500,3000,3500,4000,4500,5000
500 PRINT"■LA MISURA DI UNA GRANDEZZA FISICA E'"
510 PRINT"SOGGETTA AD ERRORI CASUALI E RIPETENDO"
520 PRINT"MOLTE VOLTE LA MISURA I RISULTATI SODDI-"
530 PRINT"■SFANO AD UNA DISTRIBUZIONE NORMALE O"
540 PRINT"GAUSSIANA."
550 PRINT"IL PROGRAMMA STUDIA LA DISTRIBUZIONE DI"
560 PRINT"RISULTATI SPERIMENTALI, CONFRONTA LE"
570 PRINT"FREQUENZE OTTENUTE CON QUELLE PREVISTE"
580 PRINT"DALLA TEORIA E CALCOLA LA PROBABILITA'"
590 PRINT"CHE UNA MISURA CADA IN UN DATO INTERVAL-"
600 PRINT"■LO.":GOSUB5500
610 PRINT"■PRIMA DI INTRODURRE LE FREQUENZE RISUL-"
620 PRINT"TANTI DALLE MISURE SPERIMENTALI, E' NE-"
630 PRINT"CESSARIO SCRIVERE LA PIU' PICCOLA MISURA"
640 PRINT"■OTTENUTA, IL NUMERO DEGLI INTERVALLI IN"
650 PRINT"CUI CADONO LE MISURE E LA LORO AMPIEZZA."
660 INPUT"■VALORE MINIMO =";MI
670 INPUT"■NUMERO INTERVALLI =";N
680 IFN>20THENPRINT"■SPIACENTE, NON PIU' DI 20! RIPETI.":GOTO670
690 INPUT"■AMPIEZZA INTERVALLI =";DX
700 GOSUB5500
710 PRINT"■PER OGNI INTERVALLO SCRIVI LE FREQUENZE"
720 PRINT"RELATIVE, OTTENUTE CON LE MISURE SPERI-"
730 PRINT"MENTALI.■■":M=0:MX=0
740 FORI=0TON-1:PRINTSTR$(I+1);")";
750 VN=MI+DX*I:CO=8:GOSUB5600:PRINTTAB(16);
760 INPUT"FREQ. =";A(I):IFA(I)>MXTHENMX=A(I)
770 M=M+A(I):NEXTI
780 PRINTTAB(10)"■■CONFERMI? (Y/N)"
790 GETK$:IFK$=""THEN790
800 IFK$="Y"THENTT$="ON":GOTO50
810 IFK$="N"THEN610
820 GOTO790
1000 REM  FREQUENZE SPERIMENTALI
1010 PRINT"■_____________________________________"
1020 PRINT"■    ***  FREQUENZE SPERIMENTALI ***    ■"
1030 PRINT"■     N.       VALORE       FREQUENZA"
1035 PRINT"  ┌──────┬──────────┬──────────┐"
1036 FORI=0TON-1:PRINT"  |";
1040 PRINTTAB(6-LEN(STR$(I+1)));STR$(I+1);")    |";
1050 VN=MI+I*DX:CO=17:GOSUB5600:PRINTTAB(22)"|";
1060 PRINTTAB(30-LEN(STR$(A(I))));A(I);"      |"
1070 NEXTI:PRINT"  └──────┴──────────┴──────────┘"
1080 PRINT"   NUMERO DELLE MISURE:";TAB(30-LEN(STR$(M)));M
1090 PRINT"■    VUOI VEDERE L'ISTOGRAMMA? (Y/N)"
1100 GETK$:IFK$=""THEN1100
1110 IFK$="Y"THEN1140
1120 IFK$="N"THEN1100
1130 GOTO1100
1140 FORI=0TON-1:B(I)=A(I):NEXT
1150 NC=N:U1=MX/18:LS=1802-INT(NC/2):CC=7
1160 GOSUB5700:PRINT"■    U =";U;"■"
1170 FORI=1TO18:PRINTTAB(4)"■──────────────────────────":NEXT
1180 PRINTTAB(4)"■_____________________________■■■"
1190 GOSUB6000:GOSUB5500:GOTO50
1500 REM  VALORE MEDIO
1510 PRINT"■_____________________________________"
1520 PRINT"■■         ***   VALORE MEDIO   ***        "
```

```
1530 GOSUB5800
1540 PRINT"■IL NUMERO TOTALE DELLE MISURE E':■"
1550 PRINTTAB(19-LEN(STR$(M))/2);M
1560 PRINT"■IL VALORE MEDIO E':■"
1570 PRINTTAB(18-LEN(STR$(ME))/2);"X■■_■ =";ME;"■■■"
1580 GOSUB5500:GOTO50
2000 REM  SCARTI DALLA MEDIA
2010 PRINT"■_____"
2020 PRINT"■■       ***  SCARTI DALLA MEDIA  ***       "
2030 IFF1$(>)"Y"THENGOSUB5800
2040 PRINT"      N.       VALORE         SCARTO"
2050 PRINT"  ┌─────┬──────────────────┬──────────────────┐"
2060 SS=0:FORI=0TON-1:V=MI+I*DX:SC=INT(1000*ABS(V-ME)+.5)/1000
2070 PRINT"  |";TAB(6-LEN(STR$(I+1)));STR$(I+1);")   |";
2080 VN=V:CO=17:GOSUB5600
2090 PRINTTAB(22)"|";
2100 VN=SC:CO=29:GOSUB5600
2110 PRINTTAB(36)"|"
2120 SS=SS+SC*A(I):NEXTI
2130 PRINT"  └─────┴──────────────────┴──────────────────┘"
2140 PRINT"   LO SCARTO MEDIO E':";
2150 VN=INT(1000*SS/M)/1000:CO=29:GOSUB5600
2160 PRINT:GOSUB5500:GOTO50
2500 REM  SCARTI QUADRATICI
2510 PRINT"■_____"
2520 PRINT"■■       ***  SCARTI QUADRATICI  ***       "
2530 PRINT"     N.       VALORE         SCARTO QUADR."
2540 PRINT"  ┌─────┬──────────────────┬──────────────────┐"
2550 IFF1$(>)"Y"THENGOSUB5800
2560 FORI=0TON-1:V=MI+I*DX:SC=(V-ME)↑2
2570 PRINT"  |";TAB(5-LEN(STR$(I+1)));STR$(I+1);")   |";
2580 VN=V:CO=16:GOSUB5600
2590 PRINTTAB(20)"|";
2600 VN=SC:CO=29:GOSUB5600
2610 PRINTTAB(37)"|"
2620 NEXTI
2630 PRINT"  └─────┴──────────────────┴──────────────────┘"
2640 GOSUB5500:GOTO50
3000 REM  SCARTO QUADRATICO MEDIO
3010 PRINT"■_____"
3020 PRINT"■■     ***  SCARTO QUADRATICO MEDIO ***     "
3030 GOSUB5900
3040 PRINT"■LO SCARTO QUADRATICO MEDIO E':■■"
3050 PRINTTAB(17-LEN(STR$(SQ))/2);"SQM =";SQ;"■■"
3060 GOSUB5500:GOTO50
3500 REM  PROBABILITA' IN UN INTERVALLO
3510 PRINT"■_____"
3520 PRINT"■ *** PROBABILITA' IN UN INTERVALLO *** "
3530 PRINT"■L'INTERVALLO E' DATO NELLA FORMA:"
3540 PRINTTAB(12)"■(X+H),(X-H)"
3550 INPUT"■X =";XI:INPUT"■H =";HI
3560 IFF2$(>)"Y"THENGOSUB5900
3570 NT=0:H=HI/10:W=0
3580 FORI=1TO19STEP2:X=(XI-HI)+(I*H):W=W+FNP(X):NEXT
3590 NT=W*4:W=0
3600 FORI=2TO18STEP2:X=(XI-HI)+(I*H):W=W+FNP(X):NEXT
3610 NT=NT+2*W+FNP(XI-HI)+FNP(XI+HI)
3620 NT=INT(1000*NT*H/3+.5)/1000
3630 PRINT"■■LA PROBABILITA' CHE UNA MISURA CADA"
3640 PRINT"NELL'INTERVALLO CONSIDERATO E':"
3650 PRINTTAB(18-LEN(STR$(NT)));"■■P =";NT;"■■"
3660 GOSUB5500:GOTO50
4000 REM  FREQUENZE TEORICHE
4010 PRINT"■_____"
4020 PRINT"■      ***  FREQUENZE TEORICHE  ***       "
4030 PRINT"■PI: PROBABILITA' PER L'IESIMO INTERVALLO"
```

```
4040 PRINT"▢M*PI: FREQUENZA TEORICA PER M MISURE."
4050 PRINT"┌──────┬──────────┬──────────┬──────────┐"
4060 PRINT"|  N.  |    VI    |    PI    |  (M*PI)  |"
4070 PRINT"├──────┼──────────┼──────────┼──────────┤"
4080 IFF2$<>"Y"THENGOSUB5900
4090 FORI=0TON-1
4100 PRINT"| ";TAB(4-LEN(STR$(I+1)));STR$(I+1);") |";
4110 GOSUB5200
4120 VN=V:CO=13:GOSUB5600
4130 PRINTTAB(17)"| ";
4140 VN=PI:CO=22:GOSUB5600
4150 PRINTTAB(27)"| ";
4160 VN=FQ:CO=33:GOSUB5600
4170 PRINTTAB(38)"| "
4180 NEXTI
4190 PRINT"└──────┴──────────┴──────────┴──────────┘"
4200 PRINT"▢▢▢":GOSUB5500:GOTO50
4500 REM  CONFRONTO CON UNA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA
4510 PRINT"▙________________________________________"
4520 PRINT"▢■ VERIFICA DELLA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA "
4530 PRINT"     N.    FREQ.SPERIM.    FREQ.TEORICHE":FM=0
4540 PRINT" ┌──────┬──────────────┬──────────────┐"
4550 FORI=0TON-1:PRINT" | ";TAB(5-LEN(STR$(I+1)));STR$(I+1);") |";
4560 VN=A(I):CO=15:GOSUB5600:IFF2$<>"Y"THENGOSUB5900
4570 PRINTTAB(22)"| ";:GOSUB5200
4580 VN=FQ:CO=31:GOSUB5600
4590 PRINTTAB(38)"| "
4600 C(I)=FQ:IFFQ>FMTHENFM=FQ
4610 NEXTI
4620 PRINT" └──────┴──────────────┴──────────────┘"
4630 PRINT"▢▢▢":GOSUB5500
4640 U1=MX/18:U2=FM/18:IFU1<U2THENU1=U2
4650 GOSUB5700
4660 PRINT"▙U =";U;"■■■"
4670 FORI=1TO18
4680 PRINT"▢────────────────────────────────────────"
4690 NEXTI
4700 PRINT"▢■▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬▬■"
4710 FORI=0TON-1:B(I)=A(I):NEXT
4720 NC=N:CC=7:LS=1794-INT(N/2):GOSUB6000
4730 FORI=0TON-1:B(I)=C(I):NEXT
4740 CC=10:LS=1814-INT(N/2):GOSUB6000
4750 PRINT"▢▢▢":GOSUB5500:GOTO50
5000 PRINT"▙":POKE53280,14:END
5200 V=MI+I*DX:PI=EXP(-.5*((V-ME)/SQ)↑2)
5210 PI=INT(1000*PI*.39894*DX/SQ)/1000
5220 FQ=INT(10*M*PI+.5)/10
5230 RETURN
5500 PRINT"■■■PREMI UN TASTO QUALSIASI PER CONTINUARE"
5510 GETK$:IFK$=""THEN5510
5520 RETURN
5600 IFVN<.01THENPRINTTAB(CO-LEN(STR$(VN)));VN;:RETURN
5610 IT=INT(VN):PRINTTAB(CO-LEN(STR$(IT)));STR$(IT);
5620 IFVN<>ITTHEN5650
5630 IFMI=INT(MI)ANDDX=INT(DX)THENRETURN
5640 PRINT".0";:RETURN
5650 PD$=MID$(STR$(VN-IT),2,4)
5660 FORZ=LEN(PD$)TO2STEP-1
5670 IFASC(MID$(PD$,Z,1))<>48THEN5690
5680 NEXTZ
5690 PRINTLEFT$(PD$,Z);:RETURN
5700 E=1
5710 IFU1<ETHENU=E:GOTO5750
5720 IFU1<2*ETHENU=2*E:GOTO5750
5730 IFU1<5*ETHENU=5*E:GOTO5750
5740 E=E*10:GOTO5710
```

```
5750 RETURN
5800 SS=0:FORR=0TON-1:SS=SS+(MI+R*DX)*A(R):NEXT
5810 ME=INT(1000*SS/M)/1000:F1$="Y"
5820 RETURN
5900 IFF1$<>"Y"THENGOSUB5800
5910 SS=0:FORR=0TON-1:V=MI+R*DX:SC=(V-ME)↑2:SS=SS+SC*A(R):NEXT
5920 SQ=SQR(SS/M):F2$="Y"
5930 RETURN
6000 REM     STAMPA GRAFICO
6010 FORI=0TONC-1:Q=INT(B(I)/U):IFQ=0THENJ=LS+I:GOTO6030
6020 FORJ=LS+ITOLS+I-(Q-1)*40STEP-40:POKEJ,160:POKEJ+LC,CC:NEXT
6030 RS=B(I)-Q*U:OT=INT(RS*8/U):IFOT=0THEN6120
6040 IFOT=1THENCH=100:GOTO6110
6050 IFOT=2THENCH=111:GOTO6110
6060 IFOT=3THENCH=121:GOTO6110
6070 IFOT=4THENCH=98:GOTO6110
6080 IFOT=5THENCH=248:GOTO6110
6090 IFOT=6THENCH=247:GOTO6110
6100 IFOT=7THENCH=227
6110 POKEJ,CH:POKEJ+LC,CC
6120 NEXTI:RETURN
```

La linea 30 modifica il colore del bordo e definisce la funzione riportata nel testo, corrispondente ad una distribuzione gaussiana. Il valore decimale .39894 è uguale a $1/\sqrt{2\pi}$, la variabile SQ è lo scarto quadratico medio mentre ME è la media aritmetica delle misure.
Subito dopo, alla linea 40, vengono dimensionate le variabili con indice che dovranno memorizzare i risultati sperimentali e teorici. In particolare A(I) contiene le frequenze sperimentali, C(I) quelle teoriche e B(I) è una matrice di lavoro utilizzata per la stampa.
Le istruzioni DATA di linea 130 consistono in un insieme di frequenze che soddisfano a una distribuzione gaussiana e che vengono utilizzate per tracciare un istogramma da inserire accanto al titolo.
Prima di passare al menù il programma viene inviato alle linee 500-820 dove vengono scritte alcune premesse, d'altronde non indispensabili, e dove, soprattutto, vengono accettati in input i dati sperimentali che dovranno essere analizzati ed elaborati dal programma. La variabile MI è la misura con il valore più basso, N è il numero degli intervalli in cui cadono le misure sperimentali, numero che corrisponde a quello delle colonne nell'istogramma, e infine DX è l'ampiezza di tali intervalli.
Alla linea 730 compaiono due nuove variabili: M e MX. La prima è la somma di tutte le frequenze sperimentali, che corrisponde al numero totale delle misure eseguite, la seconda memorizza la maggiore frequenza, quantità che si rivelerà necessaria per il dimensionamento del grafico.
Terminata l'introduzione dei dati si può passare alla loro elaborazione. Il menù risulta piuttosto fornito presentando otto scelte operative; la nona pone termine al programma (linee 200-370). Si può osservare che ogni sezione del programma è indipendente l'una dalle altre men-

tre, ovviamente, alcune routine di calcolo sono comuni. Per evitare di svolgere inutili operazioni e abbreviare i tempi, vengono attivate variabili *flag* che indicano se alcuni risultati, indispensabili per l'esecuzione di una parte del programma, non siano già stati ottenuti in qualche fase precedente.
Sono variabili *flag* di questo tipo F1$ e F2$ presenti alle linee 2030, 2550, 3560, 4080 ecc.
Le linee 1000-1080 danno una semplice tabulazione da dati sperimentali. La funzione TAB nell'istruzione 1040 serve a incolonnare i numeri giustificando il margine destro e immediatamente dopo viene chiamata la subroutine 5600 per incolonnare numeri con riferimento al punto decimale simulando l'istruzione PRINT USING non disponibile in questa versione di Basic.
Le linee 1140-1190 rappresentano i dati sotto forma di istogramma. NC è il numero delle colonne, V1 è il valore unitario calcolato in modo che la colonna maggiore non superi le 18 righe, LS è la locazione di partenza per la rappresentazione grafica, calcolata in modo da risultare al centro dello schermo, infine CC è il codice del colore (il 7 corrisponde al giallo).
La stampa effettiva dell'istogramma avviene chiamando la subroutine 6000 (linea 1190).
Per il calcolo della media si ricorre alla subroutine 5800; le righe 1540-1580 espongono il risultato. I particolari caratteri tra virgolette nella linea 1570 controllano il cursore per porre un trattino sopra la X poiché è convenzione simboleggiare così il valore medio.
La variabile SC (linea 2060) indica lo scarto dalla media; esso viene calcolato con un'approssimazione a meno di un millesimo e il +.5 tra parentesi fa in modo che l'approssimazione non avvenga sempre per difetto. Anche qui la già citata subroutine 5600 simula l'istruzione PRINT USING per incolonnare valori numerici con riferimento al punto decimale.
Le linee 3000-3060 forniscono lo scarto quadratico medio, indicato simbolicamente con la variabile SQ. Il calcolo è demandato alla subroutine 5900.
Alle righe 3500-3660 viene calcolata la probabilità che una misura abbia a cadere in un intervallo indicato dall'utente.
Il risultato si ottiene integrando la funzione riportata nella parte generale che precede il listato e il cui grafico è riportato nella figura 16. Il calcolo con il metodo di Simpson, per il quale si rimanda al programma sugli integrali, viene svolto alle righe 3570-3620 dove XI − HI e XI + HI sono gli estremi dell'intervallo di integrazione e NT è il valore dell'integrale.
Alla riga 4140 PI, calcolata nella subroutine 5200, indica le probabilità teoriche associate a ogni risultato sperimentale mentre FQ (linea

4160), calcolata nella stessa subroutine moltiplicando PI per il numero totale delle misure M, rappresenta una frequenza teorica per l'intervallo *I*-esimo.
Il confronto tra le frequenze sperimentali e quelle teoriche si ottiene alle linee 4500-4630 sotto forma di tabella mentre successivamente (linee 4640-4750) è dato in forma grafica con l'accostamento dei due istogrammi stampati con due differenti colori. Ciascuna delle due istruzioni 4720 e 4740 attribuisce opportuni valori alle variabili utilizzate nella subroutine 6000 adibita alla stampa e si incaricano di centrare i due istogrammi ognuno nella propria metà. Si osservi che il numero di colonne che formano un grafico è variabile e non è possibile definire a priori la locazione dello schermo dalla quale iniziare la stampa.
Riportiamo ora schematicamente la funzione svolta dalle subroutine che occupano l'ultima parte del listato.
5200-5230: calcola la probabilità che abbia a verificarsi una particolare misura, compresa in un intervallo DX, e la frequenza teorica relativa alla stessa misura.
5500-5520: manda un messaggio che indica di premere un tasto per proseguire l'esecuzione del programma.
5600-5690: simula l'istruzione PRINT USING per incolonnare i numeri con riferimento al punto decimale. La colonna in cui esso viene stampato è CO, variabile che dev'essere definita prima di richiamare la subroutine; VN è il valore numerico da stampare.
5700-5750: calcola l'unità di misura U per la rappresentazione grafica.
5800-5820: calcola il valore medio di tutte le misure.
5900-5930: calcola lo scarto quadratico medio (variabile SQ).
6000-6120: stampa l'istogramma.
Il ciclo FOR NEXT della linea 6020 forma una colonnina del grafico sovrapponendo un certo numero di caratteri "pieni" mentre le linee 6030-6110 calcolano il carattere più idoneo per completare la colonnina, in modo che raggiunga l'altezza desiderata.
I caratteri sono tra quelli presenti sulla tastiera del Commodore 64. Si ricorda che i caratteri con numero di codice superiore a 127 sono le immagini in modo *reverse* di quelli con codice da 0 a 127.

LA CITTÀ DEGLI ESAGONI

La città degli esagoni altro non è che la versione computerizzata della tavola di Galton o binostato. Una disposizione piramidale di esagoni genera una serie di corridoi lungo i quali scendono palline da un'unica via d'accesso posta in alto. A ogni esagono la pallina ha 1/2 di probabilità di andare a destra e 1/2 di andare a sinistra. Le palline vengono

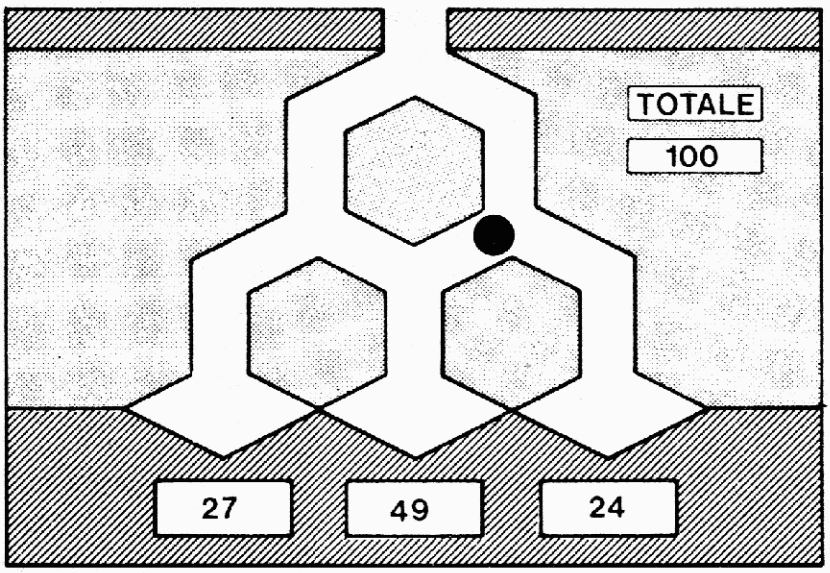


Fig. 17

raccolte e contate alle uscite. È possibile scegliere da un minimo di due uscite a un massimo di sette. Due uscite si ottengono ovviamente con un solo esagono e i risultati sono analoghi a quelli che si ottengono con testa o croce lanciando una moneta, le palline, cioè, stanno nel rapporto 1:1. Con tre vie d'uscita le distribuzioni di probabilità sono 1/4, 1/2, 1/4, ovvero le palline raccolte stanno nel rapporto di 1:2:1. Il risultato è comparabile al lancio contemporaneo di due monete. Con quattro vie d'uscita ogni pallina può scendere attraverso otto diversi percorsi e la distribuzione della probabilità è 1/8, 3/8, 3/8, 1/8; lanciando un gran numero di palline il loro numero alle uscite tenderà al rapporto 1:3:3:1. I numeri (1), (1,1), (1,2,1), (1,3,3,1) ecc. sono i coefficienti binomiali altrimenti noti per costituire il triangolo di Tartaglia:

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
```

La distribuzione di probabilità appena esaminata viene detta *binomiale* (o *bernoulliana*).

Il programma è semplicemente una simulazione di quanto è ottenibile con un apparecchio reale e in quanto tale ha il pregio di essere esente da accidenti vari e da eventuali difetti di fabbricazione. L'unica difficoltà nella tecnica di programmazione, legata per altro a un'esigenza

puramente estetica, consiste nel creare il corretto movimento della pallina.
Per questo motivo si è ricorsi a uno sprite che, come il lettore saprà, è un'immagine controllata da particolari registri, dotata di caratteristiche proprie per quanto riguarda il movimento, il colore ecc.
In questo contesto, la cosa che più importa è il controllo della posizione e, per l'appunto, uno sprite può assumere posizioni che variano pixel per pixel in modo del tutto indipendente dalle righe e colonne di testo. (Si veda l'appendice 4.)

```
10 REM LA CITTA' DEGLI ESAGONI
20 REM ************************
30 PRINT"■":POKE53280,6
40 PRINTTAB(7)"■■■■■■■■  ■■■"
50 PRINTTAB(7)" ■■■■■■■"
60 PRINTTAB(7)"■■■  ■■■"
70 PRINTTAB(7)"■ "
80 PRINTTAB(7)"■ ■ LA CITTA' DEGLI ESAGONI"
90 PRINTTAB(7)"■■■  ■■■"
100 PRINTTAB(7)" ■■■■"
110 PRINTTAB(7)"  ■■"
120 PRINTTAB(4)"■■■■■■ (PREMI UN TASTO PER INIZIARE)"
130 GETA$:IFA$=""THEN130
140 PRINT"■":SE=RND(-1)
150 PRINT"DESIDERI LEGGERE LE SPIEGAZIONI? (Y/N)"
160 GETA$:IFA$=""THEN160
170 IFA$="Y"THEN200
180 IFA$="N"THEN400
190 GOTO160
200 PRINT"■"
210 PRINT"UNA PALLINA VIENE FATTA SCENDERE ATTRA-"
220 PRINT"VERSO DEI CORRIDOI DELIMITATI DA FIGURE"
230 PRINT"ESAGONALI."
240 PRINT"■AD OGNI BIVIO LA PALLINA HA IL 50% DI"
250 PRINT"PROBABILITA' DI ANDARE A DESTRA ED IL"
260 PRINT"50% DI PROBABILITA' DI ANDARE A SINISTRA"
270 PRINT"IL COMPUTER SIMULA GLI EVENTI E REGISTRA"
280 PRINT"□I RISULTATI."
290 PRINT"■IL NUMERO DEGLI ESAGONI PUO' ESSER FAT-"
300 PRINT"TO VARIARE SCEGLIENDO IL NUMERO DELLE"
310 PRINT"VIE DI USCITA ED E' POSSIBILE DETERMINA-"
320 PRINT"□RE LA QUANTITA' DELLE PALLINE UTILIZZA-"
330 PRINT"BILI."
340 PRINT"■ORA PREMI UN TASTO QUALSIASI PER CONTI-"
350 PRINT"NUARE."
360 GETA$:IFA$=""THEN360
400 PRINT"■"
410 PRINT"SCEGLI IL NUMERO DELLE VIE DI USCITA."
420 PRINT"(IL LORO NUMERO VARIA DA 2 A 7)"
430 INPUT"N=";U
440 IFU<2ORU>7THENPRINT"□□":GOTO430
450 PRINT"■■QUANTE PALLINE VUOI? (NON PIU' DI 999)"
460 INPUT"P=";N
470 IFN<1ORN>999THENPRINT"□□":GOTO460
480 PRINT"■"
490 POKE53280,8:POKE53281,8
500 FORJ=55296TO55295+U*120:POKEJ,8:NEXT
510 L=1042:GOSUB5100
520 L=1161:GOSUB5000
```

```
530 L=1164:GOSUB5200
540 IFU=2THEN800
550 L=1279:GOSUB5000
560 L=1282:GOSUB5100
570 L=1286:GOSUB5200
580 IFU=3THEN800
590 L=1397:GOSUB5000
600 FORL=1400TO1404STEP4:GOSUB5100:NEXT
620 GOSUB5200:IFU=4THEN800
630 L=1515:GOSUB5000
640 FORL=1518TO1526STEP4:GOSUB5100:NEXT
660 GOSUB5200:IFU=5THEN800
670 L=1633:GOSUB5000
680 FORL=1636TO1648STEP4:GOSUB5100:NEXT
690 GOSUB5200:IFU=6THEN800
700 L=1751:GOSUB5000
710 FORL=1754TO1770STEP4:GOSUB5100:NEXT
720 GOSUB5200
800 PRINT"■  ■ TOTALE  "SPC(16)" PARZIALE "
810 PRINT"  ■ PALLINE "
820 PRINT"  ■  "STR$(N);
830 FORJ=1TO7-LENK STR$(N)):PRINT" ";:NEXT
840 PRINTSPC(16)"    000   "
850 FORJ=1TO(U-2)*3+2:PRINT:NEXT
860 ONU-1GOTO870,880,890,900,910,920
870 PRINTTAB(16)"■  0 |  0 |":GOTO930
880 PRINTTAB(14)"■  0 |  0 |  0 |":GOTO930
890 PRINTTAB(12)"■  0 |  0 |  0 |  0 |":GOTO930
900 PRINTTAB(10)"■  0 |  0 |  0 |  0 |  0 |":GOTO930
910 PRINTTAB(8)"■  0 |  0 |  0 |  0 |  0 |  0 |":GOTO930
920 PRINTTAB(6)"■  0 |  0 |  0 |  0 |  0 |  0 |  0 |"
930 C1=176:C2=176:C3=176
940 POKE53269,1:IFFF=1THEN1020
1000 V=53248:POKE2040,13:POKEV+39,0
1010 FORS=832TO894:READQ:POKES,Q:NEXT
1020 X=181:Y=50:POKEV,X:POKEV+1,Y
1100 FORJ=1TO18:Y=Y+1:POKEV+1,Y:NEXT
1110 FORK=1TOU-1:S=SGNK RND(1)-.5):IFS=0THENS=1
1120 FORJ=1TO16:Y=Y+1:X=X+S:POKEV,X:POKEV+1,Y:NEXT
1130 FORJ=1TO8:Y=Y+1:POKEV+1,Y:NEXT
1140 NEXTK
1150 Q=(X-149+16*(U-1))/32:R(Q)=R(Q)+1:Z$=STR$(R(Q))
1160 PRINTTAB(INT(X/8)-LENK Z$)-1)"■■";Z$
1170 C1=C1+1:IFC1<186THENPOKE1217,C1:GOTO1200
1180 C1=176:C2=C2+1:IFC2<186THENPOKE1217,C1:POKE1216,C2:GOTO1200
1190 C2=176:C3=C3+1:POKE1217,C1:POKE1216,C2:POKE1215,C3
1200 TT=TT+1:IFTT<NTHEN1020
1205 IFU<7THENPRINT
1210 PRINTTAB(5)"*** VUOI CONTINUARE? (Y/N) ***"
1220 GETA$:IFA$=""THEN1220
1230 IFA$="Y"THEN1260
1240 IFA$="N"THENPOKEV+21,0:PRINT"■":END
1250 GOTO1220
1260 FORJ=1TO7:R(J)=0:NEXT:TT=0
1270 POKEV+21,0:FF=1:GOTO400
5000 POKEL,233:POKEL+1,160:POKEL+2,105
5010 POKEL+40,160:POKEL+41,160
5020 POKEL+79,233:POKEL+80,160
5030 POKEL+81,160:POKEL+82,223
5040 RETURN
5100 POKEL,95:POKEL+1,160
5110 POKEL+2,160:POKEL+3,105
5120 POKEL+41,160:POKEL+42,160
5130 POKEL+80,233:POKEL+81,160
5140 POKEL+82,160:POKEL+83,223
5150 RETURN
```

```
5200 POKEL,95:POKEL+1,160:POKEL+2,223
5210 POKEL+41,160:POKEL+42,160
5220 POKEL+80,233:POKEL+81,160
5230 POKEL+82,160:POKEL+83,223
5240 RETURN
5300 DATA 120,0,0,252,0,0,252,0,0
5310 DATA 252,0,0,252,0,0,120,0,0
5320 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
5330 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
5340 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
5350 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0
```

Le linee 30-130 stampano il titolo che, per ragioni puramente estetiche, è accompagnato da un disegno formato con i caratteri grafici di codice 95 e 105, stampati normali o in *reverse*.

Le spiegazioni alle linee 200-360 sono opzionali e ripropongono in sintesi quanto è già stato scritto nella parte generale che precede il listato.

Se non si desidera leggerle si può passare direttamente alla linea 400 dove inizia la parte operativa.

Questa si apre con la richiesta del numero della via d'uscita del labirinto (variabile V alla linea 430) e di quello delle palline (variabile N alla linea 460).

Le linee 480-940 disegnano il labirinto formato da un certo numero di esagoni che variano a seconda delle vie di uscita richieste. Le subroutine 5000, 5100 e 5200, chiamate dalle istruzioni 510 e seguenti, disegnano ognuna una parte della scenografia.

Le linee 1000-1020 danno vita al disegno mobile che rappresenta la pallina che scende attraverso i corridoi delimitati dagli esagoni fino ad una delle vie d'uscita. La forma dell'animazione è definita con le istruzioni DATA poste al termine del listato secondo la tecnica illustrata nell'Appendice 4. La pallina viene poi fatta scendere con cicli FOR NEXT che ne modificano la posizione e ogni volta che essa incontra un esagono viene fatta deviare diagonalmente a destra o a sinistra in modo casuale con la funzione RND della riga 1110.

Le variabili C1, C2 e C3 (linea 430) contengono i codici delle cifre che formeranno il numero che totalizza le palline scese; il valore iniziale 176 si riferisce al numero zero con l'immagine in *reverse*. Le variabili con indice R(Q) memorizzano le somme parziali delle palline scese attraverso ognuna delle uscite; l'indice Q viene calcolato alla linea 1150, con una formula particolare, in funzione dell'ascissa X e del numero delle uscite programmato. Ogniqualvolta una pallina giunge al termine del suo percorso, viene attivata la stampa del contatore parziale (linea 1160) e totale (linee 1170-1190); il processo si ripete poi fino a che non siano scese tutte le palline.

Al termine, se il numero dei lanci è stato elevato, i contatori dovreb-

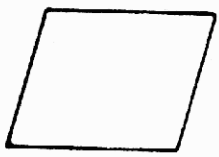
bero rivelare una distribuzione bernoulliana delle probabilità ma, naturalmente, non ci si dovrà aspettare una perfetta coincidenza!

ESERCIZIO 5-1
Scrivete un programma che simuli il lancio di due dadi e tenga conto delle frequenze dei singoli risultati. Fate in modo di poter definire il numero totale dei lanci e di visualizzare i dadi usando i caratteri grafici del Commodore 64.

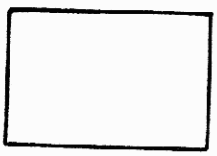
APPENDICE A

Principali simboli usati nei diagrammi a blocchi e loro significato.

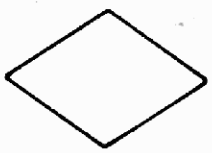
INIZIO PROGRAMMA



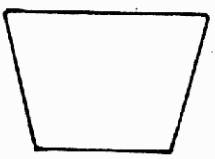
INPUT DA TASTIERA



OPERAZIONE A LIVELLO
DI MEMORIA CENTRALE

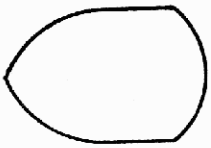


DECISIONE O CONFRONTO

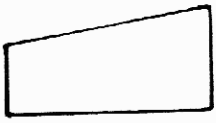


LETTURA DI UN RECORD
DA UN FILE (INPUT)

SCRITTURA DI UN RECORD
IN UN FILE (OUTPUT)

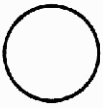


SCRITTURA SU TERMINALE
VIDEO



INTERROGAZIONE TASTIERA
GET A$

RICHIAMO ROUTINE



STOP

APPENDICE B

Caratteri programmabili

A differenza dei normali caratteri tipografici, come quelli di questo stesso libro, quelli che vengono inviati sullo schermo dal computer sono formati da una particolare disposizione di punti. Ogni simbolo, sia esso una lettera, un numero o un altro segno particolare, occupa una matrice di 8 × 8 punti, cioè 8 righe da 8 punti ciascuna. Il computer memorizza la forma dei caratteri nella ROM (*Read Only Memory*) dove, per ciascuno di essi, sono riservati 8 byte (un bit per ogni punto) a partire dalla locazione **53248**. Non è possibile modificare il contenuto della ROM e con essa, come dice il nome "Read Only Memory", si possono solo effettuare operazioni di lettura per mezzo dell'istruzione **PEEK**. Per poter modificare il set dei caratteri in modo da creare simboli nuovi che soddisfino a particolari esigenze, è quindi indispensabile copiare i byte che contengono la loro forma dalla ROM alla RAM e poi inserire in essa opportuni valori tramite istruzioni **POKE**.

Questo in linea generale. In particolare bisogna innanzitutto conoscere quale numero decimale esprime una data disposizione di punti. Abbiamo detto che ogni punto corrisponde a un bit e una riga di otto punti a un byte che è la quantità di memoria direttamente indirizzabile. Ognuno degli otto punti suddetti ha un particolare valore che dipende dalle potenze di 2. Il primo di essi a destra vale 2^0, cioè 1; i successivi, procedendo verso sinistra, valgono nell'ordine $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$ ed infine $2^7 = 128$. Se un punto non deve essere visibile il suo valore sarà zero, altrimenti avrà uno dei precedenti valori a seconda della sua posizione.

Il byte corrispondente alla configurazione di 8 punti conterrà la somma di tutti i loro valori. Il totale va da un minimo di 0, a un massimo di 255 corrispondente a 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1.
Inserendo nelle opportune locazioni di memoria otto valori per modificare gli otto byte che contengono la forma di un carattere è possibile pertanto creare un nuovo simbolo che prima non era disponibile.
Vediamo ora nei dettagli la procedura da seguire.

```
5 PRINT"■":POKE52,48:POKE56,48
10 POKE56334,PEEK(56334)AND254:POKE1,PEEK(1)AND251
20 FORI=0TO511:POKEI+12288,PEEK(I+53248):NEXT
30 POKE1,PEEK(1)OR4:POKE56334,PEEK(56334)OR1
40 POKE53272,(PEEK(53272)AND240)+12
50 FORCH=60TO63:FORBY=0TO7
60 READNU:POKE12288+8*CH+BY,NU
70 NEXTBY:NEXTCH
80 PRINTCHR$(147)
90 PRINT"CARATTERI PROGRAMMABILI■"
100 PRINT"  "CHR$(60);CHR$(61);CHR$(13);"  ";CHR$(62);CHR$(63)
110 PRINT"■PREMI UN TASTO"
120 GETA$:IFA$=""THEN120
130 POKE53272,21
140 PRINT"■":END
150 DATA 0,0,0,0,0,0,1,2
160 DATA 0,0,0,0,0,0,240,8
170 DATA 4,8,127,127,103,36,24,0
180 DATA 12,12,254,254,254,36,24,0
```

5: pulisce lo schermo e limita la memoria a disposizione del programma per evitare di "sporcare" l'area ove viene collocato il set dei caratteri.
10: disattiva il timer di interruzione della tastiera e attiva la ROM caratteri.
20: copia dalla ROM, a partire dalla locazione 53248, un totale di 512 byte corrispondenti ai primi 64 caratteri comprendenti le lettere, i numeri e i segni di punteggiatura.
30: riattiva l'I/0 e il timer di interruzione della tastiera.
40: indica al programma di trarre la forma dei caratteri non più dalla ROM ma dalla RAM, a partire dalla locazione 12288.
50-70: ciclo per la lettura delle istruzioni DATA e per il loro trasferimento nella precedente area di memoria RAM.
80: pulisce lo schermo.
90-100: visualizzano i caratteri appena programmati.
110-120: fanno proseguire il programma alla pressione di un tasto.
130: ripristina il normale set dei caratteri.
140: termina il programma.
150-180: istruzioni DATA con i valori decimali che, trasferiti nelle opportune locazioni di memoria, definiscono le nuove forme dei caratteri personalizzati.

APPENDICE C

Bit map

Una delle caratteristiche più interessanti del Commodore 64 è la grafica ad alta risoluzione.
Normalmente lo schermo è suddiviso in 25 righe di 40 caratteri ciascuna per un totale di 1000 posizioni.
Esiste una particolare area di memoria, dalla locazione **1024** alla **2023**, dove sono conservati i codici dei simboli presenti in ogni posizione. 1000 byte sono quindi sufficienti a memorizzare tutto ciò che appare sullo schermo a un dato istante.
Per ottenere l'alta risoluzione è invece necessario riservare un bit di memoria per ogni punto dello schermo (pixel).
Poiché lo schermo è formato da 320×200 punti ed è necessario un byte per memorizzare la configurazione di 8 punti, con un breve calcolo si può stabilire che la *bit map* (cioè, alla lettera, la "mappa di bit"), in grado di rispecchiare il contenuto dello schermo in alta risoluzione, consiste in 8000 byte.
Ciò che complica alquanto questo genere di applicazioni è la particolare corrispondenza tra i punti dello schermo e la sequenza dei byte nella memoria.
Più di qualsiasi definizione chiarirà meglio il concetto lo schema riportato in testa alla pagina seguente ove, si ricorda, un byte corrisponde a una sequenza di 8 punti.

byte	0	byte	8	...	byte	312
byte	1	byte	9	...	byte	313
byte	2	byte	10	...	byte	314
byte	3	byte	11	...	byte	315
byte	4	byte	12	...	byte	316
byte	5	byte	13	...	byte	317
byte	6	byte	14	...	byte	318
byte	7	byte	15	...	byte	319
byte	320	byte	328	...	byte	632
byte	321	byte	329	...	byte	633
byte	322	byte	330	...	byte	634
byte	323	byte	331	...	byte	635
byte	324	byte	332	...	byte	636
byte	325	byte	333	...	byte	637
byte	326	byte	334	...	byte	638
byte	327	byte	335	...	byte	639

ecc.

Dato un punto sullo schermo, di coordinate *X*, *Y*, la maggiore difficoltà consiste nel calcolare a quale byte appartiene il bit da porre in ON.
La routine, di cui si riporta qui il listato, si avvale della tecnica di programmazione in *bit map* per tracciare il grafico di una funzione in alta risoluzione.

```
990 PRINT"□"
1000 BA=8192:POKE53272,PEEK(53272)OR8
1010 POKE53265,PEEK(53265)OR32
1020 FORI=BATOBA+7999:POKEI,0:NEXT
1030 FORI=1024TO2023:POKEI,3:NEXT
1040 FORX=0TO319STEP.5
1050 Y=INT(90+80*SIN(X/10))
1060 CH=INT(X/8):RO=INT(Y/8)
1070 LN=YAND7:BY=BA+RO*320+8*CH+LN
1080 BI=7-(XAND7)
1090 POKEBY,PEEK(BY)OR(2↑BI)
1100 NEXTX
1110 POKE1024,16
1120 GETA$:IFA$=""THEN1120
1130 POKE53265,PEEK(53265)AND223
1140 POKE53272,21:PRINT"□"
```

990: pulisce lo schermo.
1000: la variabile BA contiene la locazione di partenza della *bit map* mentre la successiva istruzione **POKE** modifica il registro di controllo della memoria.
1010: entra nel modo *bit map* modificando un altro registro di controllo del VIC.

1020: azzera l'area di memoria del video nel modo *bit map*.
1040-1100: ciclo per tracciare il grafico della funzione trigonometrica SIN.
Si ricorda che la funzione SIN ritorna valori compresi tra −1 e +1; in questo esempio a questi valori si sono fatti corrispondere 80 pixel sul video. Per quanto riguarda le variabili utilizzate, CH e RO rappresentano rispettivamente la colonna e la riga ove si trova il punto, LN è una delle otto linee all'interno della riga, BY il byte nel quale si trova il bit da mettere in ON, infine BI indica il bit corrispondente al punto che si vuole visualizzare. La linea 1090 modifica lo stato del bit senza tuttavia alterare lo stato degli altri bit appartenenti allo stesso byte.
1110: altera il colore della locazione del video situata nell'angolo in alto a sinistra per indicare che il grafico è terminato.
1130: disattiva la *bit map*.
1140: ripristina il registro di controllo della memoria del VIC.

APPENDICE D

Animazioni

Un'animazione, o sprite, è un particolare disegno, con una forma e un colore definiti dall'utente, che può occupare una qualsiasi posizione dello schermo, non condizionata quindi dalle 25 righe e dalle 40 colonne come i caratteri di un testo.
Il manuale a questo proposito è abbastanza chiaro e qui non si ha la pretesa di trattare l'argomento nella generalità dei suoi aspetti, ma semplicemente si vuole illustrare la tecnica utilizzata in uno dei programmi ove si è resa necessaria un'animazione grafica.
Le caratteristiche dello sprite sono controllate da particolari registri VIC-II. Tali registri hanno la loro locazione più bassa posta a **53248** ed è quindi consuetudine riferirli relativamente a questa. Se indichiamo con la variabile V tale locazione di partenza, troviamo il registro **V + 21** per attivare l'animazione, il registro **V + 39** per il controllo del colore (per lo sprite 0) e ancora V e V + 1 per le coordinate in pixel.
Per definire la forma dell'animazione si segue un procedimento simile a quello per programmare caratteri personalizzati con la differenza che mentre un normale carattere occupa una matrice di 8×8 punti, uno sprite occupa una matrice di 24×21 punti per un totale di 63 byte. Lo schema che segue illustra la corrispondenza tra i punti ed i byte di memoria, tenendo conto che ogni byte controlla una sequenza di 8 punti.

riga	1:	byte	1	byte	2	byte	3
riga	2:	byte	4	byte	5	byte	6
...		...		...		...	
riga	21:	byte	61	byte	62	byte	63

Esaminiamo ora la breve routine per la creazione di una animazione. In realtà la figura creata con queste istruzioni appare statica ma per lo spostamento è sufficiente modificare gli opportuni registri che controllano la sua posizione.

```
10 V=53248:POKE2040,192:POKEV+39,7
20 FORQ=12288TO12350:READW:POKEQ,W:NEXT
30 POKEV+21,1:POKEV,150:POKEV+1,120
40 GOTO40
100 DATA 0,255,0,0,255,192,255,255,224
110 DATA 255,63,240,255,179,255,0,181,255
120 DATA 7,173,255,7,246,255,0,6,255,7
130 DATA 251,127,7,251,255,0,7,255,3,251
140 DATA 240,3,251,192,0,0,0,0,0,0,0,0
150 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
```

10: V è la locazione di partenza per i registri di controllo.
L'istruzione POKE 2040, 192 indica il blocco di memoria dal quale trarre i dati che definiscono la forma dell'animazione. La successiva POKE specifica il colore.
20: lettura delle istruzioni DATA che specificano la forma dell'animazione e loro caricamento in memoria a partire dalla locazione 12288.
30: abilita l'animazione numero 0 e indica la sua posizione con le coordinate 150, 120.
40: l'istruzione GOTO rinvia al suo stesso numero di linea; in gergo questo è un "tappo" che blocca l'esecuzione del programma mandandolo in un ciclo senza fine.
100-150: istruzioni DATA con i valori da attribuire ai 63 byte che definiscono la forma di un'animazione.

APPENDICE E

Risposte agli esercizi

Esercizio 1-1:

```
10 REM ESERCIZIO 1
20 PRINT"■ 2",
30 FORJ=3TO100STEP2
40 FORK=2TOSQR(J):IFJ/K=INT(J/K)THEN60
50 NEXTK:PRINTJ,
60 NEXTJ:END
```

Esercizio 1-2:

```
10 REM ESERCIZIO 2
20 PRINT"■":C=1:P=1:U=100
30 FORJ=3TO1000STEP2
40 FORK=2TOSQR(J):IFJ/K=INT(J/K)THEN70
50 NEXTK:IFJ<=UTHENC=C+1:GOTO70
60 GOSUB100
70 NEXTJ:GOSUB100:END
100 PRINT"NUMERI PRIMI TRA";P;"E";U;TAB(28);"=";C:C=1:P=P+100:U=U+100
110 RETURN
```

Esercizio 1-3:

```
10 REM  ESERCIZIO 3
20 PRINT"■"
```

```
30 INPUT"N1 =";A:INPUT"N2 =";B
40 IFA>BTHENX=A:Y=B:GOTO60
50 X=B:Y=A
60 R=X-Y*INT(X/Y):IFR=0THEN80
70 X=Y:Y=R:GOTO60
80 PRINT"IL M.C.D. E':";Y
```

Esercizio 1-4:

```
10 REM ESERCIZIO 4
20 DEF FNF(T)=C*(1+R)↑T
30 INPUT"CAPITALE INIZIALE =";C
40 INPUT"TEMPO IN ANNI =";A
50 PRINT"INDICA TRE TASSI D'INTERESSE"
60 FORK=1TO3:PRINT"TASSO";K;"(%) =";:INPUTP(K)
70 NEXTK:PRINT
75 PRINT" N.",
76 FORJ=1TO3:PRINTP(J);"%",:NEXTJ:PRINT
80 FORT=1TOA:PRINTT,:FORK=1TO3
90 R=P(K)/100:PRINTINT(FNF(T)),:NEXTK:PRINT
100 NEXTT:END
```

Esercizio 1-5:

```
10 REM ESERCIZIO 5
20 PRINT""
30 INPUT"CAPITALE INIZIALE =";C
40 INPUT"CAPITALE FINALE =";M
50 INPUT"TEMPO IN ANNI =";T
60 R=(M/C)↑(1/T)-1:R=INT(1000*R)/10
70 PRINT"IL TASSO D'INTERESSE E' DEL";R;"%."
```

Esercizio 2-1:

```
10 REM LUNGHEZZA DI UNA CORDA
20 PRINT""
30 INPUT"RAGGIO =";R
40 PRINT"DISTANZA DELLA CORDA DAL CENTRO"
50 INPUT"D =";D
60 IFD(0ORD>RTHENPRINT"ERRORE!":GOTO30
70 X=SQR(R*R-D*D):X=INT(100*X*2)/100
80 PRINT"LA LUNGHEZZA DELLA CORDA E':"
90 PRINT"L =";X:END
```

Esercizio 2-2:

```
10 REM DISTANZA DI UNA PERSONA
20 PRINT""
30 PRINT"SCRIVI L'ALTEZZA PRESUNTA DELLA PERSONA"
```

```
40 INPUT"H = (CM) ";H
50 PRINT"■SCRIVI LA SUA ALTEZZA APPARENTE"
60 INPUT"A = (CM) ";A
70 D=INT(10*H/A)/10
80 PRINT"■LA PERSONA SI TROVA A CIRCA"
90 PRINTD;"METRI DI DISTANZA.":END
```

Esercizio 3-1:

```
10 DEF FNY(X)=LOG(X)
   . . . . .
150 FORXS=1TO12
   . . . . .
163 IFXS=1THEN170
```

Esercizio 3-2:

```
10 PRINT"■"
20 DEF FNF(X)=SIN(X)
30 FORJ=1504TO1543:POKEJ,67:POKEJ+54272,7:NEXTJ
40 FORJ=1043TO2003STEP40:POKEJ,93:POKEJ+54272,7:NEXTJ
50 POKE1523,91
60 FORJ=1TO39
70 X=(J-20)/4
80 LO=1503+J-40*INT(8*FNF(X))
90 POKELO,42:POKELO+54272,7
100 NEXTJ
110 END
```

Esercizio 3-3:

```
100 DEF FNF(X)=36/X
    . . . . .
132 Y1=0:Y2=0
133 FORX=X1TOX2STEPDX:IFX>-.1ANDX<.1THEN136
134 IFFNF(X)<Y1THENY1=FNF(X)
    . . . . .
255 IFX>-.1ANDX<.1THENPY(C)=9999:GOTO270
```

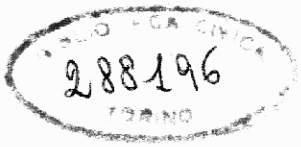
Esercizio 3-4:

```
10 REM INTERSEZIONE TRA DUE RETTE
20 PRINT"■"
30 FORJ=1TO2:PRINT"■RETTA N.";J
40 PRINT"LA RETTA E' PARALLELA ALL'ASSE DELLE Y?"
50 INPUT"(S/N) ";R$
60 IFR$="S"THEN90
70 IFR$="N"THEN110
80 GOTO50
90 PRINT"L'EQUAZIONE DELLA RETTA E':  X = K"
100 INPUT"K =";K(J):P(J)=1:GOTO130
110 PRINT"L'EQUAZIONE DELLA RETTA E': Y=MX+Q"
120 INPUT"M =";M(J):INPUT"Q =";Q(J)
130 NEXTJ
140 IFP(1)<>1ORP(2)<>1THEN170
150 IFK(1)=K(2)THEN280
```

```
160 GOTO290
170 IFP(1)=P(2)THEN200
180 IFP(1)=1THENX=K(1):Y=M(2)*X+Q(2):GOTO250
190 X=K(2):Y=M(1)*X+Q(1):GOTO250
200 IFM(1)<>M(2)THEN230
210 IFQ(1)=Q(2)THEN280
220 GOTO290
230 X=(Q(2)-Q(1))/(M(1)-M(2))
240 Y=M(1)*X+Q(1)
250 PRINT"LE COORDINATE DEL PUNTO DI INTERSEZIONE"
260 PRINT"SONO:          X =";X
270 PRINT"               Y =";Y:END
280 PRINT"LE DUE RETTE SONO COINCIDENTI":END
290 PRINT"LE DUE RETTE SONO PARALLELE":END
```

Esercizio 5-1:

```
10 REM LANCIO DI DUE DADI
20 PRINT"":DIMF(12)
30 INPUT"QUANTI LANCI";N
40 PRINTTAB(12)"┌─────┐   ┌─────┐"
50 PRINTTAB(12)"│     │   │     │"
60 PRINTTAB(12)"│     │   │     │"
70 PRINTTAB(12)"│     │   │     │"
80 PRINTTAB(12)"└─────┘   └─────┘"
90 PRINT"FREQUENZE:"
100 PRINT"──────────────"
110 FORJ=2TO12:PRINTJ;TAB(5);"= 0":NEXT
120 PRINT"──────────────"
130 PRINT"TOT. = 0":TT=0
140 FORL=1TON:T=0:FORD=1TO2
150 X=INT(RND(1)*6)+1:T=T+X:TB=D*8+5
160 ONXGOTO170,180,200,220,240,260
170 PRINT"      ";TAB(TB);"    ":PRINTTAB(TB)" ● ":PRINTTAB(TB)"    ":GOTO280
180 PRINT"      ";TAB(TB);"  ●":PRINTTAB(TB)"    "
190 PRINTTAB(TB)"●  ":GOTO280
200 PRINT"      "
210 FORW=1TO3:PRINTTAB(TB)" ● ":NEXT:GOTO280
220 PRINT"      ":PRINTTAB(TB)"● ●":PRINTTAB(TB)"
230 PRINTTAB(TB)"● ●":GOTO280
240 PRINT"      ";TAB(TB);"● ●":PRINTTAB(TB)" ● "
250 PRINTTAB(TB)"● ●":GOTO280
260 PRINT"      "
270 FORW=1TO3:PRINTTAB(TB)"● ●":NEXT
280 NEXTD
290 FORW=1TOT+2:PRINT:NEXT
300 F(T)=F(T)+1:PRINTTAB(6);F(T):TT=TT+1
310 FORW=1TO13-T:PRINT:NEXT
320 PRINTTAB(6);TT
325 GETK$:IFK$=""THEN325
326 REM   PER UN'ESECUZIONE PIU' VELOCE
327 REM   TOGLIERE LA LINEA 325
330 NEXTL
340 GETK$:IFK$=""THEN340
350 PRINT"":END
```



Finito di stampare nel mese di marzo 1985
presso Lito Velox - Trento
Printed in Italy

Siete interessati ai personal computer?

Su questo argomento, nella collana "il piacere del computer" sono stati pubblicati i seguenti titoli.

Troverete questi libri nelle principali librerie, oppure potete ordinarli direttamente alla casa editrice compilando la cartolina qui allegata

32 programmi con il PET
Il volume contiene 32 programmi in Basic, completamente documentati con listati, esecuzioni di prova, istruzioni per far girare il programma, suggerimenti per variazioni, ecc. 240 pagine, 16.000 lire, sigla PDC 1

Intervista sul personal computer, hardware
Seicento domande e risposte sul mondo del personal computer. Questo primo volume, dedicato all'hardware, contiene una introduzione ai computer in generale e ai microprocessori in particolare.
240 pagine, 16.000 lire, sigla PDC 2

32 programmi con l'Apple
Il volume contiene 32 programmi in Basic, completamente documentati: con listati, esecuzioni di prova, istruzioni per far girare il programma, suggerimenti per variazioni, ecc. 248 pagine, 16.000 lire, sigla PDC 3

Microsoft Basic
Un breve manuale di introduzione al Microsoft Basic, una evoluzione e specializzazione del Basic originale, che è di fatto lo standard del Basic per microcomputer. 150 pagine, 12.000 lire, sigla PDC 4

Pascal
Scritto per coloro che non hanno esperienza di calcolatori o programmazione. Gli argomenti sono organizzati in modo che il lettore possa iniziare a programmare fin dall'inizio.
200 pagine, 12.000 lire, sigla PDC 5

32 programmi con il TRS-80
Trentadue programmi, completamente documentati, pronti per essere eseguiti su un TRS-80 modello I. Il volume comprende i listati, le spiegazioni e i consigli per ulteriori progetti.
240 pagine, 12.000 lire, sigla PDC 6

Intervista sul personal computer, software
In questo secondo volume, dedicato al software, altre centinaia di domande e risposte sul mondo dei personal computer. Contiene una introduzione alla programmazione, ai linguaggi assembler e a quelli evoluti.
200 pagine, 12.000 lire, sigla PDC 7

Imparate il Basic con il PET/CBM
Questo libro è stato progettato per essere utile a chiunque desideri imparare a programmare in Basic avendo a disposizione un PET.
250 pagine, 16.000 lire, sigla PDC 8

Il personal computer come professione
Il personal computer vi offre mille opportunità di lavoro: scrivere articoli o libri su computer; intraprendere un'attività di consulenza o organizzativa. Il libro contiene numerosi consigli per la migliore riuscita.
112 pagine, 9.000 lire, sigla PDC 9

Te ne intendi di computer?
Lo scopo di questo libro è di aumentare il livello della vostra comprensione dei computer. Sapere cosa possono e cosa non possono fare, qual è il loro ruolo nella società, quali problemi creano.
144 pagine, 12.000 lire, sigla PDC 10

Il Basic e il personal computer, uno: introduzione
Il libro, scritto in tono amichevole e informale, non richiede precedenti esperienze con i computer. Vi è compresa una presentazione del Basic con decine di esempi dettagliati, che fanno diventare realtà le vostre idee.
190 pagine, 14.000 lire, sigla PDC 11

Imparate il linguaggio dell'Apple
Questo libro vi mette in grado di comprendere il linguaggio macchina dell'Apple partendo dagli esempi più semplici ed arrivando all'uso del miniassembler. 340 pagine, 15.000 lire, sigla PDC 12

Il Basic e il personal computer, due: applicazioni
Numerosi programmi in Basic adatti ad ogni personal computer. L'uso delle variabili alfanumeriche, gli algoritmi di sort, i giochi, l'arte con il computer sono esempi di programmi illustrati nel volume.
200 pagine, 14.000 lire, sigla PDC 13

Il manuale del CP/M
Questo volume è un'introduzione breve ma efficace alla tecnica e alla filosofia del CP/M. 120 pagine, 9.500 lire, sigla PDC 14

A scuola con il PET/CBM
Trenta programmi didattici per ogni tipo di PET/CBM: matematica, fisica, statistica, ecc. 160 pagine, 13.000 lire, sigla PDC 15

Il manuale dell'Atom
L'edizione italiana del manuale originale di questo personal computer, ora importato in Italia. 300 pagine, 18.500 lire, sigla PDC 16

Il libro del Commodore VIC 20
Questo libro è inteso come supplemento al manuale della macchina, e presenta numerose caratteristiche del VIC.
156 pagine, 12.000 lire, sigla PDC 17

Troverete questi libri nelle principali librerie, oppure potete ordinarli direttamente alla casa editrice compilando la cartolina qui allegata

SUL RETRO ALTRE INFORMAZIONI

Ho trovato questa cartolina nel libro .....

acquistato in .....

In questo spazio potete scrivere quello che pensate di questo libro.

☐ Desidero ricevere il vostro più recente catalogo

☐ Desidero ricevere i volumi qui indicati:

sigla	titolo	prezzo
	totale	

☐ Pagherò al postino l'importo totale indicato + L. 1.000 quale contributo alle spese di spedizione

☐ Allego assegno o vaglia n. ..... per l'importo totale indicato

Il debug nei personal computer
Il "debug", in informatica, è la messa a punto dei programmi, la ricerca e la correzione finale degli errori. Si tratta di una operazione di grande importanza, che si può effettuare in vari modi, tutti trattati in questo libro.
144 pagine, 15.000 lire, sigla PDC 18

Programmazione in Basic per l'uomo d'affari
Questo libro è per gli uomini d'affari che vogliono imparare ad usare il calcolatore e parte dalla convinzione che sia facile per un uomo d'affari imparare a programmare la gestione di una azienda.
256 pagine, 19.000 lire, sigla PDC 19

Imparate il Basic con lo ZX-81
È il microcomputer più venduto nel mondo. Ma necessita di software e documentazione: questo libro contiene 37 programmi che illustrano tutte le caratteristiche e le capacità della macchina.
132 pagine, 13.000 lire, sigla PDC 20

Dal Basic al Pascal
Questa guida rende facile passare dalla propria conoscenza del Basic ad una perfetta padronanza del Pascal, un linguaggio a 2 livelli che richiede uno spazio inferiore di memoria nel vostro computer.
88 pagine, 10.000 lire, sigla PDC 21

Imparate il Basic con il Texas TI 99/4A
Il Texas TI 99/4A vi può aiutare nell'apprendimento delle lingue, della matematica, tenere la contabilità della vostra famiglia. Basta conoscere il linguaggio giusto: questo libro ve lo insegna.
264 pagine, 22.000 lire, sigla PDC 22

A scuola con il Texas TI 99/4A
Scritto da un insegnante, questo è un libro di software per la scuola. Gli argomenti sono presentati in ordine di difficoltà crescente e sono tutti trattati negli studi medi inferiori e superiori.
208 pagine, 18.000 lire, sigla PDC 23

Come usare il Commodore 64
Il lettore troverà nel libro non solo una facile guida per imparare il Basic del Commodore 64, ma anche una fonte completa di informazioni sull'installazione, gli accessori, gli user's group ed il software disponibile.
128 pagine, 18.000 lire, sigla PDC 24

Imparate il Basic con lo Spectrum
Un libro per chi non ha esperienza di computer, e per chi è già esperto ma necessita di maggiori informazioni di quelle del manuale. Partendo dai principi di base, il lettore può arrivare alle più avanzate tecniche utilizzabili.
192 pagine, 19.000 lire, sigla PDC 25

A scuola con il Commodore 64
Scritto da due insegnanti, questo è un libro di software per la scuola. I programmi sono in Basic, e sono tra i pochi programmi originali, studiati e scritti in Italia e non tradotti.
172 pagine, 17.000 lire, sigla PDC 26

Imparate il Basic con l'IBM Personal Computer
I 53 capitoli e le 5 appendici, porteranno in breve anche coloro che non hanno esperienza del linguaggio dell'IBM ad apprezzare le moltissime capacità di questo personal.
372 pagine, 26.000 lire, sigla PDC 27

Introduzione al Lisp
Questo volume presenta gli elementi essenziali del Lisp in modo piano e accessibile, e riporta e commenta una sessantina di programmi e di routine immediatamente utilizzabili.
216 pagine, 19.000 lire, sigla PDC 28

Programmi in Basic per l'elettronica
Una raccolta di routine d'aiuto alla soluzione di problemi che frequentemente si incontrano, soprattutto in fase di progettazione e impegnano moltissimo tempo in calcoli di solito noiosi e ripetitivi.
138 pagine, 14.000 lire, sigla PDC 29

Il linguaggio macchina dello Spectrum
Sono fornite le routine più interessanti per realizzare divertenti scorrimenti sullo schermo, per rinumerare le linee di un programma, per ricerche veloci, per la grafica ad alta pubblicità.
152 pagine, 16.000 lire, sigla PDC 30

32 programmi per il VIC 20
I programmi riportati spaziano dai giochi alle applicazioni domestiche, dall'istruzione alla grafica, alla matematica. Sono completamente documentati, illustrati e discussi.
250 pagine, 18.000 lire, sigla PDC 31

Introduzione all'Apple MacIntosh
Il volume si propone di far conoscere questa nuova macchina, chiarirne l'impostazione di fondo, spiegare quali funzioni consente di assolvere, come affrontare i problemi tipici del personal computer.
126 pagine, 16.000 lire, sigla PDC 32

Grafica e suoni con il Commodore 64
Questo volume è una guida alle capacità grafiche e sonore del Commodore 64 che porta il lettore dai primi rudimenti alla conoscenza delle funzioni degli integrati VIC II e SID e della loro programmazione.
266 pagine, 22.000 lire, sigla PDC 33

Come usare l'IBM PCjr.
Per sapere tutto sul PCjr... per chi deve decidere se questo è il computer adatto alle sue esigenze, per chi lo ha acquistato e ora vuole imparare a sfruttarlo nel miglior modo.
140 pagine, 16.000 lire, sigla PDC 34

32 programmi con il Commodore 64
Programmi da usare subito, per far funzionare utilmente il proprio calcolatore, ma anche programmi per imparare a programmare.
244 pagine, 19.000 lire, sigla PDC 35

Matematica e geometria con il Commodore 64
Ogni programma è preceduto da spiegazioni e commenti che ne fanno un libro per imparare e non solo una raccolta di listati.
200 pagine, 19.000 lire, sigla PDC 36

ZX Spectrum: tecniche avanzate di linguaggio macchina
Consente agli esperti un uso più sofisticato del computer. Vi sono descritte routine particolarmente complesse e ognuna di queste è illustrata con disegni e diagrammi.
176 pagine, 18.000 lire, sigla PDC 37

Chimica con il pocket computer
Per studenti e professionisti dediti alla chimica, propone calcoli e programmi su temi di termodinamica, chimica industriale, chimica analitica, cinetica e spettroscopia.
112 pagine, 14.000 lire, sigla PDC 38

Programmi in Basic per i geometri
Si rivolge agli aspiranti geometri e ai geometri professionisti, proponendo un uso intelligente e funzionale del computer per l'apprendimento e l'attività professionale.
212 pagine, 19.000 lire, sigla PDC 39

cedola di commissione libraria

cognome e nome

indirizzo

cap. località

(partita iva o codice fiscale)

firma

il formato della cartolina è conforme alle vigenti norme postali

franco muzzio editore

via makallè, 73

35138 padova

Il libro, scritto da un insegnante già noto come autore di software didattico, contiene 25 programmi di matematica e geometria.
I programmi sono stati realizzati in Basic appositamente per il Commodore 64 e si avvalgono anche della grafica ad alta risoluzione.
Il volume tratta i più comuni argomenti svolti negli studi medi inferiori e superiori e si rivolge non solo a studenti ed insegnanti ma anche a quanti, ormai lontani dai banchi di scuola, vogliono riscoprire, da una diversa angolatura, il piacere della matematica.

Risparmiate tempo ed errori!
Tutti i programmi descritti in questo libro sono disponibili su tre cassette, pronti per essere utilizzati.
Per l'ordine usate la cartolina inserita nel volume.

franco muzzio & c. editore

ISBN 88-7021-283-1

L. 19.000 (18.627)